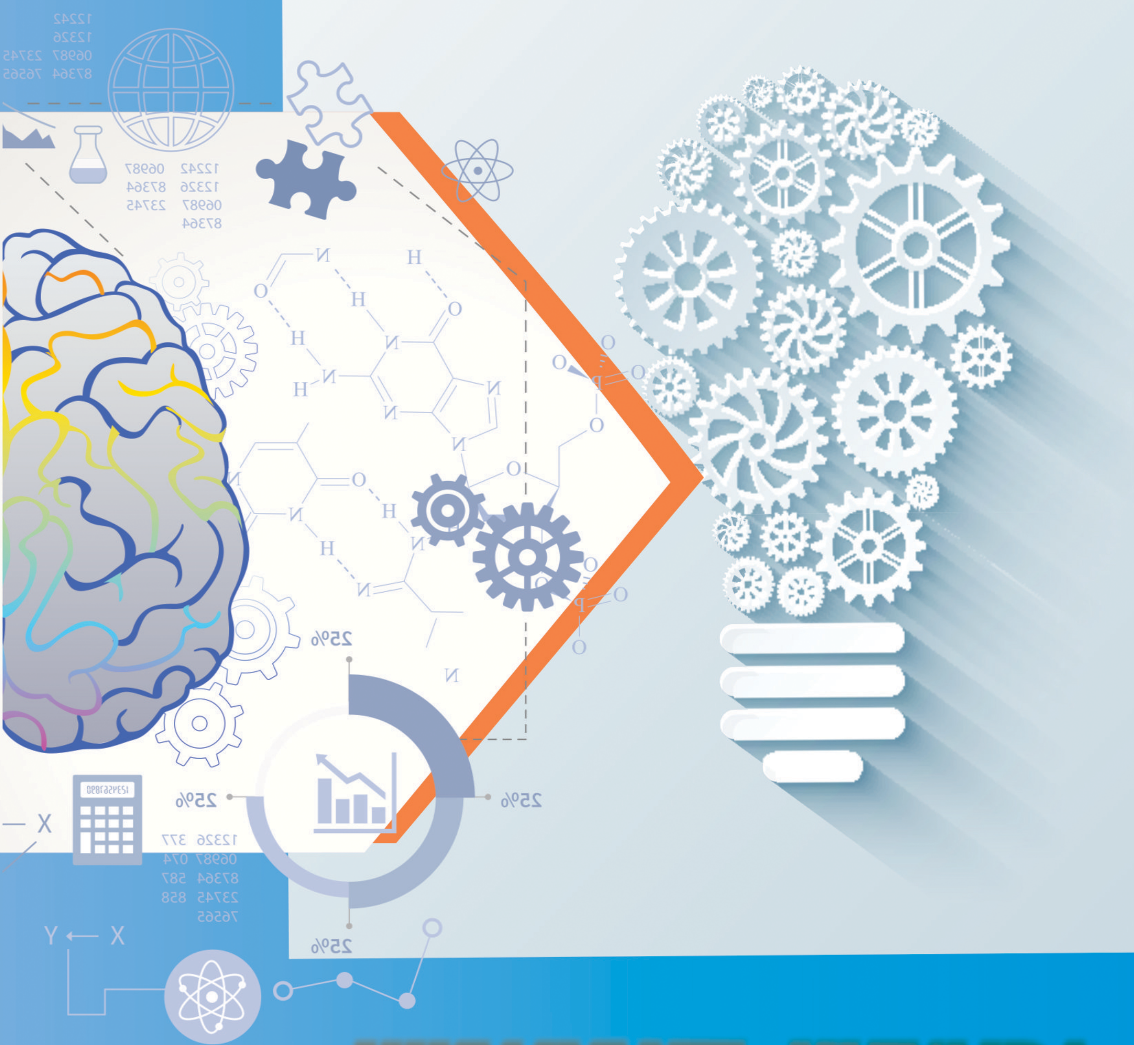
LOGIKA MATEMATIKA



HIKMAYANTI HUWAIDA

LOGIKA MATEMATIKA

Undang-Undang No. 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Perlindungan Pasal 26

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap :

i. penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv. penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).
3. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).
4. Setiap Orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp 4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah).

LOGIKA MATEMATIKA

HIKMAYANTI HUWAIDA

Poliban Press

LOGIKA MATEMATIKA

Penulis:
HIKMAYANTI HUWAIDA

ISBN:
978-623-7694-71-7

ISBN Elektronik:
978-623-7694-72-4 (PDF)

Editor dan Penyunting:
Faris Ade Irawan

Desain Sampul dan Tata letak:
Rahma Indera; Eko Sabar Prihatin

Penerbit:
POLIBAN PRESS
Anggota APPTI (Asosiasi Penerbit Perguruan Tinggi Indonesia)
no.004.098.1.06.2019
Cetakan Pertama, 2022

Redaksi:
Politeknik Negeri Banjarmasin, Jl. Brigjen H. Hasan Basry,
Pangeran, Komp. Kampus ULM, Banjarmasin Utara
Telp: (0511)3305052
Email: press@poliban.ac.id

Diterbitkan pertama kali oleh:
Poliban Press, Banjarmasin, Januari 2022

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunianya sehingga buku *Logika Matematika* telah dapat diselesaikan. Buku ini merupakan pengantar bagi mahasiswa Diploma di Politeknik Negeri Banjarmasin.

Terimakasih disampaikan kepada Joni Riadi S.ST., M.T. selaku Direktur Politeknik Negeri Banjarmasin dan Nurmahaludin, S.T., M.T. selaku Ketua Pusat Penelitian dan Pengabdian Masyarakat beserta sekretaris dan staf. Terimakasih juga disampaikan kepada Faris Ade Irawan, Reza Fauzan, Eko Sabar Prihatin dan Rahma Indera yang telah berkontribusi dalam editing serta seluruh tim Poliban Press dan semua pihak yang telah ikut membantu dalam penyelesaian buku ini.

Kami menyadari masih terdapat kekurangan dalam buku ini untuk itu kritik dan saran terhadap penyempurnaan buku ini sangat diharapkan. Semoga buku ini dapat memberi maanfaat bagi semua pihak.

Banjarmasin,

Poliban Press

PRAKATA

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Buku Ajar *Logika Matematika*.

Buku Ajar *Logika Matematika* dimaksudkan sebagai bahan untuk dijadikan sebagai acuan umum untuk Mata Kuliah Logika matematika bagi mahasiswa Program Studi Manajemen Informatika Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin.

Dengan selesainya buku Ajar ini, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar–besarnya kepada:

1. Bapak Joni Riadi, ST, MT, selaku Direktur Politeknik Negeri Banjarmasin.
2. Padli S.Sos., M.M., selaku Ketua Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin.
3. Rekan–rekan Staf Pengajar Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin.

Akhirnya penulis berharap semoga buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa pada khususnya dan bagi pembaca pada umumnya, amien.

Banjarmasin, Agustus 2021

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1
LOGIKA MATEMATIKA

Capaian Pembelajaran:

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami dan menjelaskan:

1.1 Sejarah Logika
1.2 Pengertian Logika
1.3 Kegunaan Logika
1.4 Aliran Logika
1.5 Logika Matematika

Kita menyadari bahwa betapa pentingnya berpikir kritis dalam melakukan pemecahan masalah, baik itu masalah matematik, maupun masalah yang berhubungan langsung dengan kehidupan sehari-hari. Dengan berpikir kritis, seseorang dapat mengatur, menyesuaikan, mengubah, atau memperbaiki pikirannya, sehingga ia dapat mengambil keputusan untuk bertindak lebih tepat. Untuk dapat berpikir kritis, seseorang harus juga memiliki kemampuan penalaran. Sedangkan jalan kunci untuk melakukan penalaran adalah dengan memahami logika. Jadi, secara tidak langsung, untuk dapat melakukan pemecahan masalah, syarat yang tak boleh ditinggalkan adalah memahami logika.

1.1 Sejarah Logika

1. Abad Yunani Kuno

Zeno dari citium disebut-sebut dalam sejarah sebagai peletak batu pertama digunakannya istilah logika. Tetapi persoalan-persoalan logika telah dipikirkan oleh para filsuf Madzhab Elea. Persoalan yang diusung oleh mereka adalah masalah identitas dan perlawanan asas dalam relaitas. Hal ini terungkap dalam pikiran dialektis parmenidas. Zeno filsuf besar dari aliran stoisisme membagi ajarannya ke dalam 3 bagian:

a. Fisika yang dilukiskan sebagai lading dan pohon-pohonnya.
b. Logika sebagai pagarnya.
c. Etika sebagai buahnya.

Pikiran dialektis perminides tertuang dalam ajarannya "yang ada" ada dan "yang tidak ada" tidak ada. Masalah identitas dituangkan dalam konsepnya bahwa yang ada itu ada dan yang tidak ada itu tidak ada. Masalah perlawanan asas dalam realitas dituangkan dalam konsep, yang ada tidak mungkin menjadi tidak ada dan sebaliknya. Yang menjadikan pikiran secara eksplisit sebagai focus pemikiran (objek material), mulai dilakukan oleh kaum sofis, salah satunya gorgias. Ia mengatakan manusia tidak memiliki pengetahuan apa-apa, yang dituangkan dalam tiga konsepnya, yaitu seandainya manusia memiliki pengetahuan, ia tidak tahu bahwa ia punya pengetahuan. Seandainya manusia memiliki pengetahuan dan tahu, pengetahuan itu tak terpahami.

Seandainya menusia memiliki pengetahuan, tahu dan dipahami, tapi tidak bisa dikatakan. Setidaknya konsep Gorgias telah mempersoalkan masalah hubungan pikiran dan bahasa, penggunaan bahasa dalam kegiatan pemikiran. Sehingga pertanyaanya adalah dapatkan ungkapan mengatakan setepatnya apa yang ditangkap pikiran ? Setidaknya konsep gorgias telah mempersoalkan masalah hubungan pikiran dan bahasa penggunaan bahasa dalam kegiatan pemikiran. Sehingga pertanyaan adalah dapatkah ungkapan mengatakan setepatnya apa yang ditangkap pikiran ?

Sokrates menggunakan metode Ironi dan *Maieutika tekhne*, yang defacto mengembangkan metode induktif. Oleh Plato metode Sokrates dibuat lebih ulum sehingga menjadi teori idea. Idea adalah prototypa sedangkan benda-benda duniawi adalah *ectypa*. Gagasan Plato memberikan dasar pada perkembangan logika, yaitu bertalian dengan ideogenesis, masalah penggunaan bahasa dalam pikiran.

Logika sebagai ilmu baru terwujud berkat karya Aristoteles. *To organon* karya Aristoteles hingga kini masih diikuti polanya, yaitu pertama, tentang idea, kedua tentang keputusan, dan ketiga tentang proses pemikiran. Aristoteles, seorang filosof dan ilmuwan terbesar dalam dunia masa lampau, yang memelopori penyelidikan ihwal logika, memperkaya hampir tiap cabang falsafat dan memberi sumbangan-sumbangan besar terhadap ilmu pengetahuan. Pendapat Aristoteles, alam semesta tidaklah dikendalikan oleh serba kebetulan, oleh keinginan atau kehendak dewa yang terduga, melainkan tingkah laku alam semesta itu tunduk pada hukum-hukum rasional. Kepercayaan ini menurut Aristoteles diperlukan bagi manusia untuk mempertanyakan setiap aspek dunia alamiah secara sistematis, dan kita harus memanfaatkan pengamatan empiris, dan alasan-alasan yang logis sebelum mengambil keputusan

Sesudah Aristoteles Theoprastus mengembangkan logika Aristoteles, dan kaum stoa mengembangkan logika proposisi dan bentuk-bentuk berpikir sistematis. Kemudian logika mengalami era dekadensi seiring dengan perkembangan ilmu yang menjadi dangkal dan sederhana. Thales filsuf Yunani pertama yg meninggalkan segala dongeng, takhayul, dan cerita-cerita isapan jempol belaka dan berpaling pada akal budi untuk memecahkan rahasia alam semesta (saya paling suka ini...memecahkan rahasia alam, dan mencoba menebak jalan pikiran semesta). Yang paling terkenal dalam penalarannya adalah Thales mengatakan bahwa air adalah arkhe (Yunani) yang berarti prinsip atau asas utama alam semesta. Saat itu juga, Thales telah mengenalkan logika induktif. Socrates lahir di Athena, dan merupakan generasi pertama dari tiga ahli filsafat besar dari Yunani, yaitu Socrates, Plato dan Aristoteles. Socrates adalah yang mengajar Plato, dan Plato pada gilirannya juga mengajar Aristoteles. Peninggalan pemikiran Socrates yang paling penting ada pada cara dia berfilsafat dengan mengejar satu definisi absolut atas satu permasalahan melalui satu dialektika. Pengejaran pengetahuan hakiki melalui penalaran dialektis menjadi pembuka jalan bagi para filsuf selanjutnya. Perubahan fokus filsafat dari memikirkan alam menjadi manusia juga dikatakan sebagai jasa dari Socrates. Manusia menjadi objek filsafat yang penting setelah sebelumnya dilupakan oleh para pemikir hakikat alam semesta. Pemikiran tentang manusia ini menjadi landasan bagi perkembangan filsafat etika dan epistemologis di kemudian hari. Beserta kaum Sofis, Plato juga merintis dan memberikan saran-saran pada bidang penalaran ini. kebanyakan teori logika yang kita kenal berasal dari pemikiran Aristoteles dan logika model ini merupakan logika Aristoteles... dialah yang mengenalkan logika sebagai ilmu (*logica scientia*). Nah, saat Thales tadi mengemukakan air adalah arkhe alam semesta yang berarti air adalah jiwa sesuatu, Aristoteles menyimpulkan: Air adalah jiwa tumbuh-tumbuhan (karena tanpa air tumbuhan mati). Air adalah jiwa hewan dan jiwa manusia. Air jugalah uap. Air jugalah es. Pada masa Aristoteles logika masih disebut dengan analitica (Logika Formal), yang secara khusus meneliti berbagai argumentasi yang berangkat dari proposisi yang benar, dan dialektika yang secara khusus meneliti argumentasi yang berangkat dari proposisi yang masih diragukan kebenarannya. Inti dari logika Aristoteles adalah silogisme. Logika pertama-tama disusun oleh Aristoteles (384322 SM), sebagai sebuah ilmu tentang hukum-hukum berpikir guna memelihara jalan pikiran dari setiap kekeliruan. Logika sebagai ilmu baru pada waktu itu, disebut dengan nama “analitika” dan “dialektika ”. Kumpulan karya tulis Aristoteles mengenai logika diberi nama Organon, terdiri atas enam bagian. Buku Aristoteles berjudul Organon (alat) berjumlah enam, yaitu:

a. *Categoriae* menguraikan pengertian-pengertian.
b. *De interpretatione* tentang keputusankeputusan.
c. *Analytica Posteriora* tentang pembuktian.
d. *Analytica Priora* tentang Silogisme.
e. *Topica* tentang argumentasi dan metode berdebat.
f. *De sohisticis elenchis* tentang kesesatan dan kekeliruan berpikir.

Karya Aristoteles tentang logika dalam buku *Organon* dikenal di dunia barat selengkapnya ialah sesudah berlangsung penyalinan-penyalinan yang sangat luas dari sekian banyak ahli pikir Islam ke dalam bahasa Latin. Penyalinan-penyalinan yang luas itu membukakan masa dunia barat kembali akan alam pikiran grik tua. Logika Aristoteles adalah suatu sistem berpikir deduktif (*deductive reasoning*), yang bahkan sampai saat ini masih dianggap sebagai dasar dari setiap pelajaran tentang logika formal (*formal logic*). Analytic adalah ilmu logika yang berdasarkan pada premis-premis yang diasumsikan benar. Salah satu konsep dasar dari logika Aristoteles adalah silogisme. "*A discourse in which, certain things being stated, something other than what is stated follows of necessity from their being so.*" Logika formal adalah sebuah ilmu-pengetahuan besar tentang sistim proses berfikir. Logika formal merupakan hasil karya filasat zaman yunani kuno. Pemikirpemikir Yunani kuno awal lah yang menemukan metode berpikir. Pemikir Yunani kuno, seperti Aristoteles, mengumpulkan, mengkelasifikasikan, mengkritik dan mensistimasikan hasil-hasil positif dari berbagai pemikiran dan membangun sebuah sistim berfikir yang disebut logika formal. Euklides melakukan hal yang sama untuk dasardasar geoemetri; Archimides untuk dasar-dasar mekanika;

Ptolomeus dan Alexandria kemudian menemukan astronomi dan geografi; dan Galen untuk anatomi. Logika Aristoteles mempengaruhi cara berfikir umat manusia selama dua ribu tahun. Logika jenis ini merupakan empat jenis aturan penalaran atau yang disebut juga penalaran silogistik. Dia juga mengembangkan aturan untuk pembuatan alasan berantai yang jika diikuti tidak akan pernah menghasilkan simpulan yang salah bila premis–premisnya benar. Yang masuk akal, rangkaian–rangkaian dasar adalah silogisme. Silogisme adalah pasangan dalil yang digabungkan akan memberikan suatu simpulan yang baru. Contohnya, “Semua manusia akan mati” dan “Semua orang Yunani adalah manusia” menghasilkan simpulan yang logis yaitu “Semua orang Yunani akan mati”. Cara pikir tersebut tidak memiliki lawan sampai kemudian ditantang, dijatuhkan dan menjadi ketinggalan zaman oleh dan karena dialektika, sebuah sistim besar kedua dalam ilmu cara berfikir. Dialektika merupakan hasil dari gerakan ilmu-pengetahuan revolusioner selama seabad, yang dilakukan oleh pekerja-pekerja intelektual. Berbeda dengan logika klasik atau yang juga dikenal dengan istilah analitika, dialektika berawal dari proposisiproposisi yang masih diragukan kebenarannya. Ide dasar dialektika sudah dicetuskan oleh Aristoteles dalam Organon-nya. Ia menyebutkan sepuluh kategori yang membangun penalaran atau logika dialektika, yaitu : substansi, kuantitas, kualitas, relasi, tempat, waktu, posisi, keadaan, aksi, dan keinginan. Sebagaimana Heraclitus mengatakan “everything flows”. Murid Aristoteles yang menjadi pemimpin Lyceum, melanjutkan pengembangn logika. Theoprastus memberi sumbangan terbesar dalam logika ialah penafsirannya tentang pengertian yang mungkin dan juga tentang sebuah sifat asasi dari setiap kesimpulan. Istilah logika untuk pertama kalinya dikenalkan oleh Zeno dari Citium 334 SM - 226 SM pelopor Kaum Stoa.

2. Abad Pertengahan

Pada awal abad pertengahan hingga tahun 1141, perkembangan logika masih berkisar pada konsep logikanya Aristoteles, terutama predikasi dan logika proposisi. Dua karya tersebut ditambah karya Boethius dan Pophyries seringkali disebut sebagai logika lama. Sesudah tahun 1141, empat karya Aristoteles yang lain lebih dikenal sebagai logika baru. Logika lama dan logika baru diberi nama logika antiq, yang dibedakan dengan logika modern atau logika Suposisi, yang dikembangkan para filsuf Arab. Para filsuf Arab menekankan pada pentingnya pendalaman logika Suposisi untuk menerangkan kesesatan logis. Hal lain yang dibahas adalah ciri-ciri term sebagai symbol tata bahasa dari konsep-konsep. Suposisi dalam hal ini merupakan arti fungsional di dalam proposisi tertentu. Pada abad XIII-XV logika modern mengalami perkembangan yang cukup significant setelah ditemukannya metode logika baru oleh Raymond Lullus. Metode yang dimaksud adalah Ars Magna, yakni semacam Aljabar pengertian untuk membuktikan kebenaran-kebenaran tertinggi.

Pada abad ke-7 Masehi berkembanglah agama islam di jazirah Arab dan pada abad ke-8, agama ini telah dipeluk secara meluas ke Barat sampai perbatasan Perancis sampai Thian Shan. Dizaman kekuasaan khalifah Abbasiyyah sedemikian banyaknya karya-karya ilmiah Yunani dan lainnya diterjemahkan ke dalam bahasa, sehingga ada suatu masa dalam sejarah islam yang dijuluki dengan Abad Terjemahan. Logika karya Aristoteles juga diterjemahkan dan diberi nama Ilmu Mantiq. Tokoh logika fenomenal zaman Islam adalah AlFarabi (873-950 M) yang terkenal mahir dalam bahasa Grik Tua (Yunani kuno), menyalin seluruh karya tulis Aristoteles dalam berbagai bidang ilmu dan karya tulis ahli-ahli pikir Grik lainnya. Al-Farabi menyalin dan memberi komentar atas enam bagian logika dan menambahkan dua bagian baru sehingga menjadi delapan bagian. Al-Farabi muda belajar ilmu-ilmu Islam dan musik di Bukhara, dan tinggal di Kazakhstan sampai umur 50. Ia pergi ke Baghdad untuk menuntut ilmu di sana selama 20 tahun. Setelah kurang lebih 10 tahun tinggal di Baghdad, yaitu kira-kira pada tahun 920 M, Al-Farabi kemudian mengembara di kota Harran yang terletak di utara Syria, dimana saat itu Harran merupakan pusat kebudayaan Yunani di Asia kecil. Ia kemudian belajar filsafat dari Yuhana bin Jilad. Tahun 940 M, Al-Farabi melajutkan pengembaraannya ke Damaskus dan bertemu dengan Sayf Al-Dawla al Hamdanid, Kepala daerah (distrik) Aleppo, yang dikenal sebagai simpatisan para Imam Syi'ah. Kemudian al-Farabi wafat di kota Damaskus pada usia 80 tahun (Rajab 339 H/ Desember 950 M) di masa pemerintahan Khalifah Al Muthi' (masih dinasti Abbasiyyah). Al-Farabi adalah seorang komentator filsafat Yunani yang ulung di dunia Islam. Meskipun kemungkinan besar ia tidak bisa berbahasa Yunani, ia mengenal para filsuf Yunani; Plato, Aristoteles dan Plotinus dengan baik. Kontribusinya terletak di berbagai bidang seperti matematika, filosofi, pengobatan, bahkan musik. Al-Farabi telah menulis berbagai buku tentang sosiologi dan sebuah buku penting dalam bidang musik, Kitab Al-Musiqa. Selain itu, ia juga dapat memainkan dan telah menciptakan bebagai alat musik. Al-Farabi dikenal dengan sebutan "guru kedua" setelah Aristoteles, karena kemampuannya dalam memahami Aristoteles yang dikenal sebagai guru pertama dalam ilmu filsafat. Dia adalah filsuf Islam pertama yang berupaya menghadapkan, mempertalikan dan sejauh mungkin menyelaraskan filsafat politik Yunani klasik dengan Islam serta berupaya membuatnya bisa dimengerti di dalam konteks agama-agama wahyu. Karya al-Farabi tentang logika menyangkut bagian-bagian berbeda dari karya Aristoteles Organon, baik dalam bentuk komentar maupun ulasan panjang. Kebanyakan tulisan ini masih berupa naskah; dan sebagain besar naskah-naskah ini belum ditemukan. Sedang karya dalam kelompok kedua menyangkut berbagai cabang pengetahuan filsafat, fisika, matematika dan politik. Kebanyakan pemikiran yang dikembangkan oleh al-Farabi sangat berafiliasi dengan system pemikiran Hellenik berdasarkan Plato dan Aristoteles. Diantara judul karya alFarabi yang terkenal adalah: Tokoh lain cendikiawan muslim yang terkenal mendalami, menerjemah dan mengarang di bidang ilmu Mantiq adalah Abdullah bin Muqaffa', ya'kub Ishaq AlKindi, Abu Nasr Al-farabi, Ibnu Sina, Abu Hamid AlGahzali, Ibnu Rusyd, Al-Qurthubi dan banyak lagi yang lain. Logika pada perkembanganya kemudian sempat mengalami masa dekadensi yang panjang. Logika bahkan dianggap sudah tidak bernilai dan dangkal sekali, barulah pada abad ke XIII sampai dengan Abad XV tampil beberapa tokoh lain seperti Petrus Hispanus, Roger Bacon, Raymundus Lullus dan Wilhelm Ocham yang coba mengangkat kembali ilmu logika sebagai salah satu ilmu yang penting untuk disejajarkan dengan ilmu-ilmu penting lainnya.

2. Abad Modern

Thomas Hobbes (1588-17-04) meskipun mengikuti tradisi Aristoteles, tetapi ajaran-ajarannya didominasi oleh paham nominalisme, yaitu pemikiran yang dipandang sebagai suatu proses manipulasi tanda-tanda verbal dan mirip operasi yang dipandang sebagai suatu proses manipulasi tanda-tanda verbal dan mirip operasi matematik.

Logika deduktif-silogistik Aristoteles dan masih menunjukkan ada tanda-tanda induktif mendapat tangangan hebat dari Francis Baqon dengan logika induktif-murninya dalam novum organum. Juga dari Rene Descarten dalam *discourse de* *methode* sebagai logika deduktif-murni. Logika ternyata perlu dilengkapi oleh metode lain, yaitu analisis Geometri dan Aljabar ala Descartes yang mempunyai kelebihan sebagai berikut, yaitu tidak terima apapun sebagai benar kecuali kalau diyakini sendiri bahwa itu benar, memilah masalah menjadi bagian-bagian terkecil untuk mempermudah penyelesaian, berpikir runtut dari yang paling sederhana sampai yang paling rumit, perincian yang lengkap dan pemeriksaan menyeluruh diperlukan supaya tidak ada yang terlupakan. John Stuart Mill juga mengusung metode induktif, seperti halnya F. Baqon. Tetapi bagi Mill, tujuannya untuk menemukan hubungan kausalitas fenomena. Bagi Mill "sebab" suatu kejadian dimaknai sebagai seluruh jumlah kondisi positif dan negative yang diperlukan. Metode Mill didasarkan pada dua asumsi, yaitu tiada factor dapat merupakan sebab dari suatu akibat jika factor tersebut tidak ada sewaktu akibat tadi terjadi. Kedua, tiada factor dapat merupakan sebab dari suatu akibat jika factor tersebut ada dan akibatnya tidak terjadi. Mill juga menuntut setiap peneliti untuk mendekati persoalan kausalitas dengan empat hal, yaitu penelitian harus sadar ada masalah yang meminta masalahnya dengan jelas. Ketiga, ia harus meneliti segala factor yang berhubungan dengan masalah tersebut. Setelah itu semua, baru peneliti dapat memilah-milah mana faktor yang ada dan tidak ada ketika masalah tersebut muncul. Mill menjelaskan metode induktif-nya ke dalam lima golongan,

1) *Method of agreement* (metode mencocokkan), "suatu sebaba disimpulkan dari kecocokan dengan sumber kejadian".
2) *Method of difference* (metode membedakan), "sesuatu sebab disimpulkan dari adanya perbedaan dalam peristiwa yang terjadi".
3) *Joint methode of agreement and difference* (metode mencocokkan). "metode ini merupakan gabungan 1 dan 2".

4) *Method of concomitant variations*, metode perubahan selang-seling yang seiring.
5) *Method of residues*, metode menyisakan.

Keterangan:
Metode: 1, 2, 3 bersifat kualitatif.
Metode 1,2,3,4, berdasarkan kurang lebih dua kejadian.
Metode: 4 bersifat kuantitatif.
Metode 5 berdasarkan satu kejadian saja.

I Kant dan G. W. R. Hegel telah memberikan pencerahan di bidang pemikiran logika. Kant memunculkan konsep logika transendental, karena ajaran logikanya membicarakan bentukbentuk pikiran pada umumnya. Disebut transendental karena juga melampaui batas pengalaman manusia, yaitu ajaran 12 "antene" akal dalam berdialog dengan realitas. “Antene” akal tersebuat adalah sebagai berikut: Aspek Kuantitas terdiri dari unsur Kesatuan, Kejamakan, dan Keutuhan. Aspek Kualitas terdiri dari Realitas, Negasi, dan Limitasi. Aspek Relasi terdiri dari Substansi-Aksidensi, SebabAkibat, dan Interaksi Timbal Balik. Aspek yang terakhir adalah modalitas yang terdiri dari Mungkin-Tidak Mungkin, AdaTiada, dan Keperluan-Kebetulan.

Sedangkan ajaran Hegel masih merupakan kelanjutan dari ajaran logika Kant. Ia mengatakan, bahwa pengalaman untuk dapat diketahui haruslah sesuai dengan struktur pikiran. Sehingga menurut Hegel, tertib pikiran identik dengan tertib realitas. Pendapat Hegel ini terpatri dalam ajaran dialektikanya tesis-antitesis-sintesis.

1.2 Aliran Logika

Terdapat 5 aliran besar dalam logika, yaitu:

1) Aliran Logika Tradisional

Logika ditafsirkan sebagai suatu kumpulan aturan praktis yang menjadi petunjuk pemikiran.

2) Aliran Logika Metafisis

Susunan pikiran itu dianggap kenyataan, sehingga logika dianggap seperti metafisika. Tugas pokok logika adalah menafsirkan pikiran sebagai suatu tahap dari struktur kenyataan. Sebab itu untuk mengetahui kenyataan, orang harus belajar logika lebih dahulu.

3) Aliran Logika Epistemologis

Dipelopori oleh Francis Herbert Bradley (1846 - 1924) dan Bernard Bosanquet (1848 - 1923). Untuk dapat mencapai pengetahuan yang memadai, pikiran logis dan perasaan harus digabung. Demikian juga untuk mencapai kebenaran, logika harus dihubungkan dengan seluruh pengetahuan lainnya.

4) Aliran Logika Instrumentalis (Aliran Logika Pragmatis)

Dipelopori oleh John Dewey (1859 - 1952). Logika dianggap sebagai alat (instrumen) untuk memecahkan masalah.

5) Aliran Logika Simbolis

Dipelopori oleh Leibniz, Boole dan De Morgan. Aliran ini sangat menekankan penggunaan bahasa simbol untuk mempelajari secara terinci, bagaimana akal harus bekerja. Metode-metode dalam mengembangkan matematika banyak digunakan oleh aliran ini, sehingga aliran ini berkembang sangat teknis dan ilmiah serta bercorak matematika, yang kemudian disebut Logika Matematika (*Mathematical Logic)*. G.W. Leibniz (1646 - 1716) dianggap sebagai matematikawan pertama yang mempelajari Logika Simbolik.

Pada abad kesembilan belas, George Boole (1815 - 1864) berhasil mengembangkan Logika Simbolik. Logika sebagai sistem matematika yang abstrak. Logika Simbolik ini merupakan logika formal yang semata-mata menelaah bentuk dan bukan isi dari apa yang dibicarakan.

Logika Simbolik memiliki makna sebagai berikut:

1) Frederick B. Fitch mengemukakan Logika simbolik adalah ilmu tentang penyimpulan yang sah (absah), khususnya yang dikembangkan dengan penggunaan metode-metode matematika dan dengan bantuan simbol-simbol khusus sehingga memungkinkan seseorang menghindarkan makna ganda dari bahasa sehari-hari.
2) Pemakaian simbol-simbol matematika untuk mewakili bahasa. Simbol-simbol itu diolah sesuai dengan aturan-aturan matematika untuk menetapkan apakah suatu pernyataan bernilai benar atau salah.

Studi tentang logika berkembang terus dan sekarang logika menjadi ilmu pengetahuan yang luas dan yang cenderung mempunyai sifat teknis dan ilmiah. Aljabar Boole, salah satu topik yang merupakan perluasan logika (dan teori himpunan), sekarang ini digunakan secara luas dalam mendesain komputer. Penggunaan simbol-simbol Boole dapat mengurangi banyak kesalahan dalam penalaran.

Ketidakjelasan berbahasa dapat dihindari dengan menggunakan simbol-simbol, karena setelah problem diterjemahkan ke dalam notasi simbolik, penyelesaiannya menjadi bersifat mekanis. Tokoh-tokoh terkenal lainnya yang menjadi pendukung perkembangan logika simbolik adalah De Morgan, Leonard Euler (1707 - 1783), John Venn (1834 - 1923), Alfred North Whitehead dan Bertrand Russell (1872 - 1970).

1.3 Pengertian Logika

Secara etimologis, istilah “logika” berasal dari bahasa Yunani, “logos”, yang berarti kata, ucapan, pikiran, atau bisa juga mengandung arti ilmu pengetahuan.

Logika berasal dari bahasa Latin logos yang berarti "perkataan". Istilah logos secara etimologis sebenarnya diturunkan dari kata sifat logike: "Pikiran" atau "kata". Istilah Mantiq dalam bahasa Arab berasal dari kata kerja Nataqa yang berarti "berkata" atau "berucap" (Hidayat, 2018).

Istilah dari logika, dilihat dari segi etimologis, berasal dari kata Yunani logos yang digunakan dengan beberapa arti, seperti ucapan, bahasa, kata, pengertian, pikiran, akal budi, ilmu. Dari kata logos kemudian diturunkan kata sifat logis yang sudah sangat sering terdengar dalam percakapan kita sehari-hari. Orang berbicara tentang perilaku yang logis sebagai lawan terhadap perilaku yang tidak logis, tentang tata cara yang logis, tentang penjelasan yang logis, tentang jalan pikiran yang logis, dan sejenisnya. Dalam semua kasus itu, kata logis digunakan dalam arti yang kurang lebih sama dengan ‘masuk akal’; singkatnya, segala sesuatu yang sesuai dengan, dan dapat diterima oleh akal sehat (Hidayat, 2018).

Suatu pernyataan yang sering didengar dalam bahasa sehari-hari, seperti alasannya tidak logis, argumentasinya logis. Semua ungkapan tersebut dimaksudkan ingin menunjuk pada satu pengertian yang sama, bahwa logis adalah masuk akal dan tidak logis adalah sebaliknya, yaitu tidak masuk akal. Apa yang sebenarnya dimaksudkan dengan istilah logika itu? Mundiri mengutip beberapa pengertian logika sebagai berikut:

1. Logika sebagai penyelidikan tentang dasar-dasar dan metode berpikir benar.
2. Pengertian logika dalam kamus munjid disebut sebagai hukum yang memelihara hati nurani dari kesalahan dalam berpikir.

3. Prof. Thaib menyatakan, bahwa logika merupakan ilmu untuk mengerakkan pikiran pada jalan yang lurus dalam memperoleh suatu kebenaran.
4. Irving m. Copi berpendapat, bahwa logika adalah ilmu yang mempelajari metode dan hukum-hukum untuk membedakan penalaran yang betul dari penalaran yang salah (hidayat, 2018).

Semua pengertian logika yang telah disampaikan di atas dapat disimpulkan, bahwa logika merupakan ilmu yang mengajarkan aktivitas akal atau berpikir sebagai objek material, sedangkan bentuk dan hukum berpikir merupakan objek formal dari logika.

Dalam arti luas, logika merupakan suatu metode dan prinsip-prinsip yang dapat memisahkan secara tegas antara penalaran yang benar dengan penalaran yang salah. Pengajaran logika terbilang sudah sangat ‘tua’, sejak ribuan tahun yang lalu. Tokoh yang dikenal sebagai pelopor logika adalah Aristoteles (348 – 322 SM).

Dalam mempelajari logika, kita tak bisa lepas dari penalaran, yang diartikan sebagai penarikan kesimpulan dalam sebuah argumen. Banyak sering pula yang mengartikan penalaran sebagai cara berpikir, sebagai suatu penjelasan dalam menunjukkan hubungan antara dua hal atau lebih berdasarkan sifat-sifat tertentu yang sudah diakui kebenarannya dengan menggunakan cara-cara tertentu hingga mencapai suatu kesimpulan yang tepat.

Logika itu sangat penting dalam khidupan sehari- hari, ini berkaitan dengan kemampuan kita bernalar. Beruntunglah kita sebagai manusia diberikan kemampuan penalaran. Jadi pada dasarnya, semua manusia itu secara tidak sadar pasti menggunakan logikanya dalam menjalani kehidupan.

Selama kita hidup, banyak permasalahan keseharian yang harus dihadapi. Kita dituntut untuk senantiasa menggunakan akal pikiran dalam melakukan setiap kegiatan yang penuh pemikiran dan pertimbangan. Kita harus memiliki pola pikir yang tepat, akurat, rasional, dan objektif. Pola berpikir seperti ini adalah pola berpikir yang terdapat dalam logika.

1.4 Kegunaan Logika

Ilmu logika yang bertujuan membimbing manusia ke arah berfikir benar, logis, dan sistematis mempunyai manfaat yang banyak. Di antaranya dapat dikemukakan sebagai berikut:

1) Membuat daya fikir menjadi lebih tajam dan berkembang melalui latihan-latihan berfikir. Oleh karenanya akan mampu menganalisis serta mengungkap permasalahan secara runtut dan ilmiah.
2) Membuat seseorang berfikir tepat sehingga mampu meletakkan sesuatu pada tempatnya dan mengerjakan sesuatu tepat pada waktunya (berfikir efektif dan efisien).
3) Membuat seseorang mampu membedakan alur pikir yang benar dan alur pikir yang keliru, sehingga dapat menghasilkan kesimpulan yang benar dan terhindar dari menarik kesimpulan yang keliru.
4) Membantu setiap orang yang mempelajari logika untuk berpikir secara rasional, kritis, lurus, tetap, tertib, metodis dan koheren.
5) Meningkatkan kemampuan berpikir secara abstrak, cermat, dan objektif.
6) Menambah kecerdasan dan meningkatkan kemampuan berpikir secara tajam dan mandiri.
7) Memaksa dan mendorong orang untuk berpikir sendiri dengan menggunakan asas-asas sistematis

8) Meningkatkan cinta akan kebenaran dan menghindari kesalahan-kesalahan berpkir, kekeliruan serta kesesatan.
9) Mampu melakukan analisis terhadap suatu kejadian.

1.5 Logika Matematika

Logika adalah bagian dari matematika, tetapi pada saat yang sama juga merupakan bahasa matematika. Pada akhir abad ke-19 dan awal abad ke-20, ada kepercayaan bahwa semua hal dalam matematika bisa direduksi menjadi logika simbolik dan bisa dibuat menjadi formal sepenuhnya. Kepercayaan ini, walaupun masih dipegang dalam bentuk modifikasinya sekarang ini, telah digoyahkan oleh K. Godel pada tahun 1930 ketika ia menunjukkan bahwa selalu ada sejumlah kebenaran yang tidak bisa diturunkan dalam sistem formal apapun.

Studi tentang logika simbolik biasanya dibagi menjadi beberapa bagian. Yang pertama dan paling mendasar adalah logika proposisi.

Logika simbolik adalah ilmu tentang penyimpulan yang sah (absah), khususnya yang dikembangkan dengan penggunaan metode-metode matematika dan dengan bantuan simbol-simbol khusus sehingga memungkinkan seseorang menghindarkan makna ganda dari bahasa sehari-hari (Frederick B. Fitch dalam Bofandra, 2008).

Logika simbolik ini dikenal dengan istilah logika matematika. Logika matematika membuat penalaran lebih terarah dan jelas tetapi secara konsep masih mengikuti ilmu logika sudah ada sebelumnya. Sehingga walaupun logika ini lahir di abad 19 M, konsep dasarnya masih sama dengan ogika klasik Aristoteles (384 - 322 SM).

Logika matematika sendiri terbentuk dari proposisi atau pernyataan, yakni kalimat yang hanya bernilai benar saja atau salah saja namun tidak keduanya (Susanna S. Epp, 2011, hal 24).

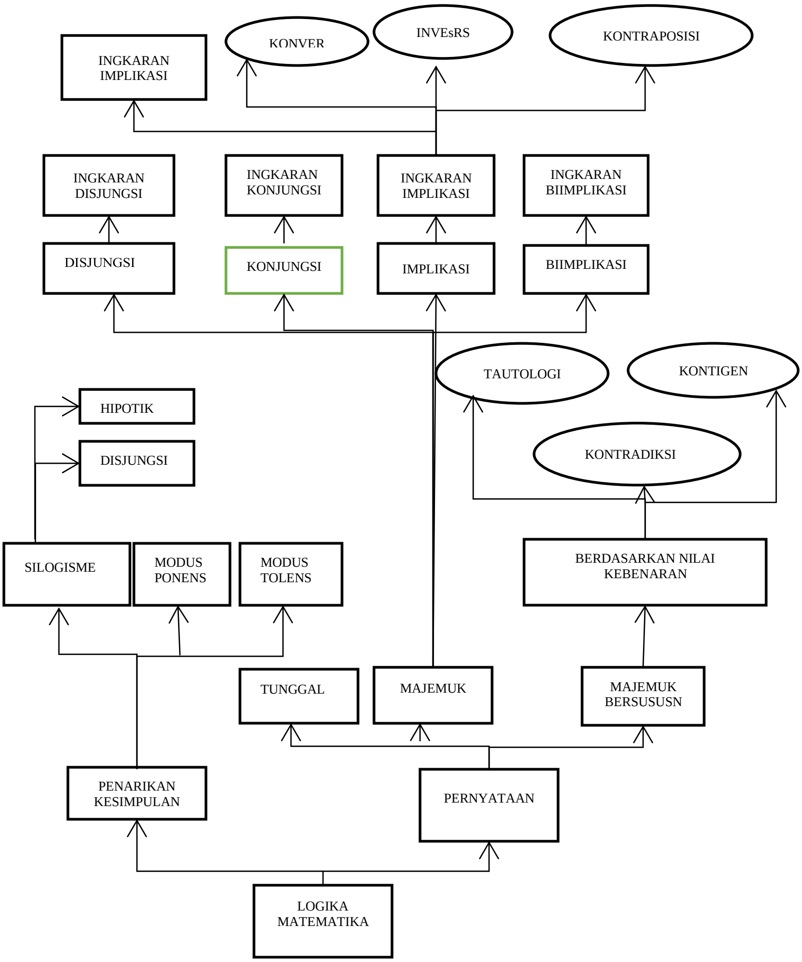
Jadi dalam kaidah logika matematika tidak memperhatikan kedudukan kalimat atau struktur kata seperti kaidah penulisan dalam bahasa Indonesia.

Kelebihan lain dalam mempelajari logika adalah dapat bisa memperoleh nilai-nilai bersifat praktis. Dengan menguasai prinsip-prinsipnya, kita akan sangat tertolong untuk menjadi lebih efektif dalam mengenal dan menghindari kesalahan bernalar yang dilakukan oleh orang lain, maupun yang dilakukan oleh diri kita sendiri.

Konsep logika matematika penting karena diperlukan pada pembelajaran materi lain dalam matematika dan kehidupan sehari-hari. Konsep logika dalam matematika seringkali digunakan untuk membuktikan teorema- teorema. Aplikasi logika matematika juga ditemukan dalam ilmu-ilmu lain meskipun tidak secara formal disebut belajar logika. Sebagai contoh logika dalam ilmu komputer digunakan untuk menguji kebenaran dari program, sedangkan dalam ilmu pengetahuan alam digunakan untuk menarik kesimpulan dari eksperimen-eksperimen dan dalam ilmu sosial digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Menurut Al-Jupri (2010) logika matematika bermanfaat untuk “Membantu kita berpikir secara rasional, kritis, dan sistematis; Meningkatkan kemampuan berpikir secara objektif dan cermat; Meningkatkan cinta pada kebenaran dan menghindari kesalahan-kesalahan berpikir”. Senada dengan hal itu belajar logika dapat pula meningkatkan kemampuan bernalar. Kemampuan menalar adalah kemampuan untuk menarik kesimpulan yang tepat dari bukti-bukti yang ada dan menurut aturan-aturan tertentu.

Berikut cakupan materi yang dibahas dalam logika matematika.



Gambar 1.1 Logika Matematika

1.6 Rangkuman

Pada masa Aristoteles logika masih disebut dengan analitica (Logika Formal), yang secara khusus meneliti berbagai argumentasi yang berangkat dari proposisi yang benar, dan dialektika yang secara khusus meneliti argumentasi yang berangkat dari proposisi yang masih diragukan kebenarannya. Inti dari logika Aristoteles adalah silogisme.

Logika Aristoteles adalah suatu sistem berpikir deduktif (*deductive reasoning*), yang bahkan sampai saat ini masih dianggap sebagai dasar dari setiap pelajaran tentang logika formal (*formal logic*). Analytic adalah ilmu logika yang berdasarkan pada premis-premis yang diasumsikan benar.

Perkembangan logika masih berkisar pada konsep logikanya Aristoteles, terutama predikasi dan logika proposisi. Dua karya tersebut ditambah karya Boethius dan Pophyries seringkali disebut sebagai logika lama.

Logika karya Aristoteles juga diterjemahkan dan diberi nama Ilmu Mantiq. Al-Farabi dikenal dengan sebutan "guru kedua" setelah Aristoteles, karena kemampuannya dalam memahami Aristoteles yang dikenal sebagai guru pertama dalam ilmu filsafat. Karya al-Farabi tentang logika menyangkut bagian-bagian berbeda dari karya Aristoteles Organon. Kebanyakan pemikiran yang dikembangkan oleh al-Farabi sangat berafiliasi dengan system pemikiran Hellenik berdasarkan Plato dan Aristoteles.

Thomas Hobbes (1588-17-04) meskipun mengikuti tradisi Aristoteles, tetapi ajaran-ajarannya didominasi oleh paham nominalisme, yaitu pemikiran yang dipandang sebagai suatu proses manipulasi tanda-tanda verbal dan mirip operasi yang dipandang sebagai suatu proses manipulasi tanda-tanda verbal dan mirip operasi matematik.

John Stuart Mill juga mengusung metode induktif, seperti halnya F. Baqon. Tetapi bagi Mill, tujuannya untuk menemukan hubungan kausalitas fenomena.

I Kant dan G. W. R. Hegel telah memberikan pencerahan di bidang pemikiran logika. Kant memunculkan konsep logika transendental, karena ajaran logikanya membicarakan bentukbentuk pikiran pada umumnya.

Sedangkan ajaran Hegel masih merupakan kelanjutan dari ajaran logika Kant. Ia mengatakan, bahwa pengalaman untuk dapat diketahui haruslah sesuai dengan struktur pikiran. Sehingga menurut Hegel, tertib pikiran identik dengan tertib realitas. Pendapat Hegel ini terpatri dalam ajaran dialektikanya tesis-antitesis-sintesis.

Terdapat 5 aliran besar dalam logika, yaitu:

1) Aliran Logika Tradisional
2) Aliran Logika Metafisis
3) Aliran Logika Epistemologis
4) Aliran Logika Instrumentalis (Aliran Logika Pragmatis)
5) Aliran Logika Simbolis

Studi tentang logika simbolik biasanya dibagi menjadi beberapa bagian. Yang pertama dan paling mendasar adalah logika proposisi.

Logika simbolik ini dikenal dengan istilah logika matematika. Logika matematika membuat penalaran lebih terarah dan jelas tetapi secara konsep masih mengikuti ilmu logika sudah ada sebelumnya.

Logika matematika sendiri terbentuk dari proposisi atau pernyataan, yakni kalimat yang hanya bernilai benar saja atau salah saja namun tidak keduanya

1.7 Latihan

Jawablah soal-soal di bawah ini dengan singkat dan jelas!

1. Jelaskan Sejarah Logika yang kamu ketahui!
2. Jelaskan pengertian logika!
3. Apakah kegunaan logika, jelaskan?
4. Sebutkan aliran-aliran logika dan jelaskan!
5. Mengapa kita perlu mempelajari logika matematika, jelaskan!

BAB 2
PERNYATAAN, KALIMAT TERBUKA

Capaian Pembelajaran:

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami dan menjelaskan:

2.1 Pernyataan (Proposisi)
2.2 Variabel dan Konstanta
2.3 Kalimat Terbuka

Sebelum membahas tentang pernyataan, akan kita bahas terlebih dahulu apa yang disebut kalimat. Kalimat adalah kumpulan kata yang disusun menurut aturan tata bahasa. Kata adalah rangkaian huruf yang mengandung arti. Kalimat berarti rangkaian kata yang disusun menurut aturan tata bahasa dan mengandung arti. Dalam logika matematika hanya dibicarakan kalimat-kalimat berarti yang menerangkan (kalimat deklaratif/*indicative sentences*).

Contoh:

1. 4 kurang dari 5
2. Indonesia terdiri atas 33 propinsi
3. 2 adalah bilangan prima yang genap
4. 3 adalah bilangan genap

dan tidak akan dibicarakan kalimat-kalimat seperti:

5. Berapa umurmu ? (Kalimat tanya)
6. Bersihkan tempat tidurmu ! (Kalimat perintah)
7. Sejuk benar udara di sini ! (Kalimat ungkapan perasaan)
8. Mudah-mudahan terkabul cita-citamu. (Kalimat pengharapan)

Dari contoh-contoh di atas, terlihat bahwa kalimat 1, 2, dan 3, bernilai benar, sedang kalimat 4 bernilai salah. Kalimat 5, 7, dan 8, tidak dapat ditentukan nilai benar atau salahnya. Nilai benar artinya ada kesesuaian antara yang dinyatakan oleh kalimat itu dengan keadaan sesungguhnya (realitas yang dinyatakannya), yaitu benar dalam arti matematis.

2.1 Pernyataan (Proposisi)

Di matematika, kita selalu mengasumsikan bahwa setiap pernyataan yang disebut proposisi selalu jelas maksudnya dan tidak ambigu sehingga hanya ada dua kesimpulan tentang pernyataan itu, yaitu benar atau salah dan tidak ada pilihan lain selain keduanya. Hal ini berbeda dengan pernyataan dalam kehidupan sehari-hari yang tidak selalu bisa ditentukan kebenarannya dan bermakna ganda, terutama pernyataan politik.

Tidak semua kalimat berhubungan dengan logika. Hanya kalimat yang bernilai benar atau salah saja yang digunakan dalam penalaran. Kalimat tersebut dinamakan proposisi (*preposition*).

Definisi Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak dapat sekaligus keduanya. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut nilai kebenarannya (*truth value*).

Pernyataan harus dibedakan dari kalimat biasa. Tidak semua kalimat termasuk ke dalam pernyataan. Pernyataan diartikan sebagai kalimat matematika tertutup yang benar saja, atau salah saja, tetapi tidak kedua-duanya dalam waktu yang bersamaan. Pernyataan adalah kalimat yang bernilai benar atau bernilai salah, tetapi tidak sekaligus bernilai kedua-duanya. Kalimat yang mempunyai nilai benar saja atau nilai salah saja adalah kalimat yang menerangkan (kalimat deklaratif). Kalimat yang menerangkan inilah yang disebut pernyataan.

Proposisi dikelompokkan menjadi dua:

1. Proposisi sederhana, tidak mengandung kata hubung
2. Proposisi majemuk, terdiri atas satu atau lebih pernyataan sederhana yang dihubungkan dengan kata hubung.

Contoh:

1. Sebuah segi empat mempunyai empat sisi.
2. Ibu Kota provinsi Jawa Tengah adalah Semarang.
3. 9 adalah suatu bilangan prima.
4. 12 kurang dari 7.

Kita dapat menentukan nilai kebenaran (benar atau salah) dari kalimat-kalimat di atas . Kalimat-kalimat (1) dan (2) bernilai benar, sedangkan kalimat-kalimat (3) dan (4) bernilai salah.

Kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya bukan merupakan pernyataan.

Contoh:

berikut ini adalah kalimat yang bukan pernyataan.

1. Apakah Siti berada di rumahmu? (kalimat tanya).
2. Alangkah indahnya lukisan ini (kalimat yang mengungkapkan suatu perasaan).
3. Tutuplah pintu itu! (kalimat perintah).
4. Semoga Anda lekas sembuh (kalimat harapan).
5. Kapan kamu menikah?
6. Makan, yuk!
7. $2x + 3 = 10$.
8. $25y - 3 = 17$, dengan y adalah bilangan real.

Kalimat-kalimat tersebut tidak bernilai benar dan juga tidak bernilai salah.

Pernyataan yang benar dikatakan mempunyai nilai kebenaran B (benar), sedangkan pernyataan yang salah dikatakan mempunyai nilai kebenaran S (salah). Nilai kebenaran suatu pernyataan kadang-kadang ditulis dengan lambang angka 1 atau 0. Angka 1 ekuivalen dengan nilai kebenaran B, sedangkan angka 0 ekuivalen dengan nilai kebenaran S.

Kebenaran suatu pernyatan dibedakan menjadi dua, yaitu:

1. Kebenaran faktual, yaitu kesesuaian antara isi peryataan dan fakta sesungguhnya.
2. Kebenaran logis, yaitu kesesuaian dengan aturan-aturan logika.

Dalam ilmu pengetahuan kita selalu berbicara mengenai obyek-obyek yang terbatas, tidak mengenai segala sesuatu. Keseluruhan obyek-obyek (terbatas) yang menjadi bahan pembicaraan yang sedang kita lakukan disebut semesta pembicaraan atau semesta saja dan disingkat S.

Untuk membicarakan anggota-anggota dari semesta biasanya digunakan lambang. Ada dua macam lambang, yaitu: variabel dan konstanta.

2.2 Variabel dan Konstanta

Definisi: *Variabel adalah simbol yang menunjukkan suatu anggota yang belum spesifik dalam semesta pembicaraan.*

Definisi: *Konstanta adalah simbol yang menunjukkan anggota tertentu (yang sudah spesifik) dalam semesta pembicaraan.*

Perhatikan kalimat berikut ini :

a. Manusia makan nasi.

b. ......memakai sepatu

c. $4 + x = 7$

d. 4 +.4= 7

e. $p < 5$

Ada yang mengatakan bahwa kalimat a benar, tetapi ada juga yang mengatakan bahwa kalimat itu salah, tergantung pada kesesuaian kalimat itu dengan keadaan sesungguhnya. Kalimat seperti ini disebut pernyataan faktual.

Ada juga yang mengatakan bahwa kelima-kalimat di atas belum dapat dikatakan mempunyai nilai. Seperti telah kita ketahui, nilai benar maupun nilai salah sebuah kalimat (baik kalimat sehari-hari maupun kalimat matematika), ditentukan oleh kebenaran atau ketidakbenaran realita yang dinyatakan.

Jika kata “manusia” dalam kalimat a diganti “Yohana”, maka kalimat menjadi “Yohana makan nasi”. Kalimat ini jelas bernilai salah saja atau bernilai benar saja; tergantung realitasnya. Kalimat ini disebut pernyataan faktual. Demikian pula jika “. . .” pada b diganti “Hani”, maka kalimat ini menjadi “Hani memakai sepatu”. Kalimat (pernyataan) itupun menjadi jelas nilainya, yaitu salah saja atau benar saja, tergantung realitanya.

Jika “x” pada c diganti “3” maka kalimat itu menjadi “4 + 3 = 7”. Kalimat (pernyataan) ini jelas bernilai benar saja. Jika “ ” pada d diganti “4”, maka kalimat itu menjadi “4 + 4 = 7”. Jelas pernyataan itu bernilai salah saja.

Jika “p” pada e diganti “0, 1, 2, 3, 4”, maka pernyataan “p < 5” menjadi bernilai benar, tetapi kalimat (pernyataan) itu menjadi bernilai salah apabila “p” pada e diganti "5, 6, 7, " dalam semesta pembicaraan himpunan bilangan cacah.

"Manusia", " ", "x", "p" pada kalimat-kalimat di atas disebut variabel. Sedangkan pengganti-pengganti seperti "Yohana", "Hani", "3", "4", dan "0, 1, 2, 3, 4" dan "5, 6, 7, " disebut konstanta.

2.3 Kalimat Terbuka

Dalam membicarakan sesuatu, orang memerlukan bahasa, salah satu unsur penting dalam bahasa adalah " kalimat", yaitu rangkaian kata yang mempunyai arti dan disusun menurut aturan tertentu. Dalam matematika dikenal 2 macam kalimat yaitu: kalimat tertutup dan kalimat terbuka.

Definisi: *Kalimat terbuka adalah kalimat yang mengandung variabel, dan jika variabel tersebut diganti konstanta dari semesta yang sesuai maka kalimat itu akan menjadi kalimat yang bernilai benar saja atau bernilai salah saja (pernyataan).*

Kalimat tertutup : Kalimat deklaratif dan pernyataan

Pernyataan : Kalimat deklaratif yang mempunyai nilai benar atau salah, tetapi tidak sama-sama benar dan salah

Contoh:

1. Jakarta Ibu kota Indonesia.
2. 3 + 6 = 8
3. Semua bilangan prima adalah ganjil.
4. Ambillah barang itu !
5. Bunga itu sangat indah.

Contoh:

1. Adalah pernyataan yang bernilai benar
2. Pernyataan yang bernilai salah
3. Pernyataan yang bernilai salah

4. Bukan pernyataan (bukan kalimat deklaratif)
5. Bukan pernyataan (Nilai kebenarannya tidak pasti)

Kalimat terbuka adalah kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya karena masih mengandung variabel atau peubah.

Contoh :
Berikut ini merupakan kalimat terbuka,

1. $3 + x = 6$
2. $x^2 + 4x + 4 = 0$
3. x adalah bilangan bulat.
4. $x + 2 > 10$
5. $x^2 - 3x + 5 = 0$
6. $y = 2x + 1$

Kalimat terbuka memuat variabel, yang akan berubah menjadi pernyataan jika variabelnya diganti oleh salah satu anggota semesta pembicaraan.

Mengubah suatu kalimat terbuka menjadi peryataan dengan mengganti (mensubstitusikan) semua peubah yang termuat di dalamnya dengan konstanta dari semestanya. Pernyataan yang dihasilkan bisa bernilai benar, bisa bernilai salah.

Contoh:
$x^2 + 5x - 24 = 0$
Kalimat tersebut menjadi pernyataan yang benar jika x diganti –8 atau 3. Himpunan {-8, 3} disebut himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $x^2 + 4x + 4 = 0$

Himpunan penyelesaian dari suatu kalimat terbuka ialah himpunan semua anggota dari S yang bila lambangnya disubstitusikan ke dalam peubah dari kalimat terbuka itu akan menghasikan pernyataan yang benar.

Contoh:

S = {Bilangan Asli }

1. $x + 2 > 10 \rightarrow$ H.P = {9, 10, 11, 12, …}
2. $x^2 - x - 6 = 0$

   $(x-3) (x + 2 = 0 \rightarrow$ HP ={3}
3. $x + 1 > 0 \rightarrow$ HP = S
4. $(2x-1)(x + 3) = 0 \rightarrow$ HP = { }

Himpunan penyelesaian harus memuat semua elemen dari semesta yang menghasilkan pernyataan benar.

2.4 Rangkuman

Tidak semua kalimat berhubungan dengan logika. Hanya kalimat yang bernilai benar atau salah saja yang digunakan dalam penalaran. Kalimat tersebut dinamakan proposisi (*preposition*).

Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak dapat sekaligus keduanya. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut nilai kebenarannya (*truth value*).

Proposisi dikelompokkan menjadi dua:

1. Proposisi sederhana, tidak mengandung kata hubung
2. Proposisi majemuk, terdiri atas satu atau lebih pernyataan sederhana yang dihubungkan dengan kata hubung.

Kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya bukan merupakan pernyataan.

Kebenaran suatu pernyatan dibedakan menjadi dua, yaitu:

1. Kebenaran faktual, yaitu kesesuaian antara isi peryataan dan fakta sesungguhnya.
2. Kebenaran logis, yaitu kesesuaian dengan aturan-aturan logika.

Untuk membicarakan anggota-anggota dari semesta biasanya digunakan lambang. Ada dua macam lambang, yaitu: variabel dan konstanta.

Variabel adalah simbol yang menunjukkan suatu anggota yang belum spesifik dalam semesta pembicaraan. Konstanta adalah simbol yang menunjukkan anggota tertentu (yang sudah spesifik) dalam semesta pembicaraan.

Kalimat terbuka adalah kalimat yang mengandung variabel, dan jika variabel tersebut diganti konstanta dari semesta yang sesuai maka kalimat itu akan menjadi kalimat yang bernilai benar saja atau bernilai salah saja (pernyataan).

Kalimat terbuka adalah kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya karena masih mengandung variabel atau peubah.

2.5 Latihan

Jawablah soal-soal di bawah ini dengan singkat dan jelas!

1. Kalimat-kalimat berikut ini, manakah yang merupakan pernyataan? Tentukanlah nilai kebenaran dari pernyataan itu dan tuliskan negasi pernyataan itu!
   a) 12 adalah suatu bilangan asli.
   b) Berapakah 16 ditambah 9?
   c) Dilarang mengganggu binatang buas!
   d) 39 adalah suatu bilangan prima.
   e) Siapakah namamu dan di mana rumahmu?
   f) 2 adalah bilangan prima dan genap.
   g) Jajaran genjang adalah suatu segi empat.
   h) 52 = 25 atau 25 = 5.
   i) Semoga Anda lulus ujian.
   j) Bangkok adalah ibukota Thailand.
   k) 9 adalah bilangan genap.
   l) Badak itu memiliki gading.

m) 3 lebih tua daripada 5
n) Setahun terdiri dari 52 minggu.
o) 8 + 4 = 12
p) Mengapa kamu menangis?
q) 3 > 5
r) Ambilkan aku kue itu!
s) Semoga kamu lekas sembuh!

2. Tentukan pernyataan manakah di bawah ini yang merupakan proposisi? Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan yang merupakan proposisi.
   a) 3 + 15 = 17
   b) Untuk beberapa bilangan bulat n, 600 = n . 15
   c) $x + y = y + x$ untuk setiap psangan bilangan riil x dan y
   d) Setiap bilangan bulat genap lebih dari empat merupakan penjumlahan dua bilangan prima
   e) Tidak ada orang utan hidup di kota
   f) Ambil 5 buah buku di atas meja
   g) $4 + x = 5$

BAB 3
PERNYATAAN MAJEMUK

Capaian Pembelajaran:

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami dan menjelaskan:

3.1 Pernyataan Majemuk
3.2 Konjungsi
3.3 Disjungsi
3.4 Implikasi
3.5 Biimplikasi
3.6 Negasi

Pernyataan majemuk adalah pernyataan yang dibentuk dari beberapa pernyataan tunggal (*component*) yang dirangkai dengan menggunakan kata hubung logika.

Kita dapat membentuk proposisi baru dengan cara mengkombinasikan satu atau lebih proposisi. Operator yang digunakan untuk mengkombinasikan proposisi disebut operator logika. Operator logika dasar yang digunakan adalah dan (*and*), atau (*or*), dan tidak (*not*). Dua operator pertama dinamakan operator biner karena operator tersebut mengoperasikan dua buah proposisi, sedangkan operator ketiga dinamakan operator uner karena ia hanya membutuhkan satu buah proposisi.

Proposisi baru yang diperoleh dari pengkombinasian tersebut dinamakan proposisi majemuk (*compound proposition*). Proposisi yang bukan merupakan kombinasi proposisi lain disebut proposisi atomik. Dengan kata lain, proposisi majemuk disusun dari proposisi-proposisi atomik. Proposisi majemuk ada tiga macam, yaitu konjungsi, disjungsi, dan ingkaran.

3.1 Pernyataan Majemuk

Suatu pernyataan tunggal dapat dinyatakan dalam lambang, misalnya p, q, r dan sebagainya. Dua pernyataan tunggal atau lebih dapat gabungkan menjadi satu pernyataan majemuk atau pernyataan komposisi dengan menggunakan kata hubung logika tertentu.

Pernyataan majemuk terdiri dari satu atau lebih pernyataan sederhana yang dihubungkan dengan kata hubung kalimat (*connective*) tertentu. Dalam bahasa Indonesia kita sering menggunakan kata-kata “tidak”, “dan”, “atau”, “jika. . . maka. . .”, “jika dan hanya jika”. Marilah sekarang kita memperhatikan penggunaan kata-kata itu dengan lebih cermat dalam matematika (dan membandingkannya dengan penggunaan dalam percakapan sehari-hari). Kita pelajari sifat-sifatnya untuk memperjelas cara berpikir kita dan terutama karena pentingnya kata-kata itu untuk melakukan pembuktian. Dalam pelajaran logika (matematika), kata-kata itu disebut kata hubung kalimat, ada lima macam kata hubung kalimat yaitu negasi, konjungsi, disjungsi, kondisional, dan bikondisional.

Negasi tidak menghubungkan dua buah pernyataan sederhana, tetapi tetap dianggap sebagai kata hubung kalimat, yaitu menegasikan pernyataan sederhana (ada yang menganggap bahwa negasi suatu pernyataan sederhana bukan pernyataan majemuk).

Pernyataan majemuk ialah pernyataan yang terdiri dari beberapa pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan menggunakan kata hubung.

Contoh:

1. Yogyakarta adalah kota pelajar dan (Yogyakarta) memiliki banyak objek wisata.
2. Kurnia pergi ke kampus atau ia nonton film.
3. Bila air dipanaskan, maka ia akan mendidih.

4. Medan ibukota Sumatera Utara bila dan hanya bila Semarang ibukota Jawa Timur.

Pernyataan majemuk di atas berturut-turut disebut: konjungsi ($\wedge$), disjungsi ($\vee$), implikasi ($\rightarrow$), dan ekuivalensi/biimplikasi ($\leftrightarrow$)

Kata hubung kalimat antara lain:

1. Negasi / kontradiksi / ingkaran (~)
2. Konjungsi / dan ($\wedge$)
3. Disjungsi / atau ($\wedge$)
4. Implikasi / kondisional / pernyataan bersyarat (($\rightarrow$)
5. Biimplikasi/bikondisional/pernyataan bersyarat ganda ($\leftrightarrow$)

Nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk ditentukan oleh: nilai kebenaran dari masing-masing pernyataan tunggalnya dan kata hubung apa yang digunakan.

Karena masing-masing pernyataan tunggalnya bisa bernilai benar atau salah, maka ada empat kemungkinan nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk.

3.2 Konjungsi

Sebarang dua pernyataan dapat digabungkan oleh kata "dan" untuk membentuk sebuah pernyataan komposit yang dinamakan konjungsi (konjunction) dari pernyataan semula. Secara simbolik, maka konjungsi dua pernyataan p dan q dinyatakan oleh $p \wedge q$.

Definisi : *Jika p benar dan q benar, maka* $p \wedge q$ *benar, jika tidak maka* $p \wedge q$ *salah. Dengan kata lain, konjungsi* *dua pernyataan hanya benar jika setiap komponen benar*.

Dua pernyataan tunggal p dan q dapat di komposisi dengan menggunakan kata hubung "dan" untuk membentuk pernyataan majemuk yang di sebut Konjungsi dari p dan q. Konjungsi dari p dan q dilambangkan dengan "$p \wedge q$ " (dibaca p dan q)
Nilai kebenaran suatu konjungsi ditentukan oleh pernyataan pernyataan penyusunnya.

Jika pernyataan p bernilai benar dan pernyataan q bernilai benar maka $p \wedge q$ benar, jika tidak demikian maka $p \wedge q$ bernilai salah.

Suatu konjungsi bernilai benar hanya bila ke dua pernyataan tunggalnya bernilai benar.

Ketentuan tersebut dapat dinyatakan dalam tabel kebenaran sebagai berikut:

Tabel 3.1 Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh:

1. Indonesia adalah negara Republik dan berpenduduk 200 juta jiwa.
2. Kerbau berkaki empat dan dapat terbang.
3. 3 adalah bilangan genap dan habis di bagi lima.

Contoh.

1. a : Jakarta adalah Ibu Kota Negara RI (B).
   b : Bandung terletak di pulau Jawa (B).

	$a \wedge b$	: Jakarta adalah Ibu Kota Negara RI dan Bandung terletak di pulau Jawa (B).
2.	p	: 7 adalah bilangan prima (B).
	q	: 7 adalah bilangan genap (S).
	$p \wedge q$	: 7 adalah bilangan prima dan 7 adalah bilangan genap (S).
3.	m	: 8 lebih besar dari 13 (S).
	n	: matahari terbit dari Timur (B).
	$m \wedge n$	: 8 lebih besar dari 13 dan matahari terbit dari Timur (S).
4.	c	: Seekor lembu berkaki seribu (S).
	d	: 13 terbagi habis oleh 4 (S).
	$c \wedge d$	: Seekor lembu berkaki seribu dan 13 terbagi habis oleh 4 (S).
5.	r	: Ima anak pandai (B)
	s	: Ima anak cekatan (B)
	$r \wedge s$	: Ima anak pandai dan cekatan (B)
6.	a	: Bunga mawar berbau harum (B)
	b	: Bunga matahari berwarna biru (S)
	$a \wedge b$	:Bunga mawar berbau harum dan bungan matahari berwarna biru (S)
7.	p	: $2 + 3 < 6$ (B), dan
	q	: Sang Saka bendera RI (B)
	$p \wedge q$	: $2 + 3 < 6$ dan Sang Saka bendera RI (B)

Perhatikan bahwa nilai kebenaran dari konjungsi ditentukan oleh nilai- nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya dan tidak perlu memperhatikan ada tidaknya hubungan antara pernyataan-pernyataan tunggalnya.

3.3 Disjungsi

Sebarang dua pernyataan dapat digabungkan oleh kata "atau" untuk membentuk sebuah pernyataan komposit yang dinamakan *disjungsi* (disjunction) dari pernyataan semula. Secara simbolik, maka disjungsi dua pernyataan *p* dan *q* dinyatakan oleh $p \vee q$.

Definisi: *Jika p benar atau q benar atau p dan q keduanya benar,maka $p \vee q$ benar, jika tidak maka $p \vee q$ salah.*

Dengan kata lain, maka disjungsi dua pernyataan hanya benar jika paling sedikit satu komponen benar.

Nilai kebenaran suatu disjungsi ditentukan oleh pernyataan pernyataan penyusunnya. Jika pernyataan p bernilai benar atau pernyataan q bernilai benar atau kedua-duanya bernilai benar maka $p \vee q$ benar, jika tidak demikian maka $p \vee q$ bernilai salah.

Disjungsi dua pernyataan bernilai salah hanya jika kedua pernyataan penyusunnya bernilai salah.

Dalam Logika Matematika juga dibedakan dua macam "atau" yang pertama disebut Disjungsi Inklusif (dengan lambang " $\vee$") dan yang kedua disebut Disjungsi Eksklusif (dengan lambang " $\underline{\vee}$").

***Definisi**:* *Suatu disjungsi inklusif bernilai benar apabila paling sedikit satu komponennya bernilai benar.*

***Definisi**:* *Suatu disjungsi eksklusif bernilai benar apabila hanya salah satu komponennya bernilai benar*

Ketentuan tersebut dapat dinyatakan dalam tabel kebenaran sebagai berikut:

Tabel 3.2 Kebenaran Disjungsi

Disjungsi inklusif			Disjungsi eksklusif		
p	q	$p \vee q$	P	q	$p \veebar q$
B	B	B	B	B	S
B	S	B	B	S	B
S	B	B	S	B	B
S	S	S	S	S	S

Aturan atau tabel nilai kebenaran tersebut dapat pula dikatakan bahwa disjungsi dua pernyataan bernilai B apabila sekurang-kurangnya satu dari pernyataan-pernyataan tunggalnya bernilai B.

Contoh:

1. Pak Hartono berlangganan harian Kompas atau Kedaulatan Rakyat.
2. Anisa pergi ke perpustakaan atau ke kantin.
3. $5 \leq 6$ (5 kurang dari atau sama dengan 6)
4. $A \vee B$ adalah himpunan semua elemen yang menjadi anggota himpunan A atau himpunan B.
5. Bila diketahui bahwa x.y = 0, maka dapat disimpulkan bahwa x =0 atau y = 0.

Contoh:

1. a : Surabaya terletak di provinsi Jawa Timur (B).
   b : Satu minggu terdiri dari tujuh hari (B).
   $a \vee b$: Surabaya terletak di provinsi Jawa Timur atau satu minggu terdiri dari tujuh hari (B).
2. u : 5 adalah bilangan prima (B).
   w : 18 terbagi habis oleh 8 (S).
   $u \vee w$: 5 adalah bilangan prima atau 18 terbagi habis oleh 8 (B).

3. p : Sebuah segitiga mempunyai empat sisi (S).

   q : Sebuah segi empat mempunyai lima diagonal (S).

   $p \vee q$: Sebuah segitiga mempunyai empat sisi atau sebuah segi empat mempunyai lima diagonal (S).

Contoh.

Tentukan *x* agar kalimat " $p(x) \vee q$" untuk *p(x)* dan *q* berikut ini menjadi disjungsi yang salah.

p(x) : $x^2 - 16 = 0$

q : kuadrat bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Penyelesaian:

p(x) : $x^2 - 16 = 0$

$(x-4)(x+4)=0$

$x = 4$ *atau* $x = -4$

Pernyataan *q*, yaitu kuadrat bilangan ganjil adalah bilangan genap bernilai salah. Agar disjungsi bernilai salah, maka haruslah *p* bernilai salah. Nilai-nilai *x* yang membuat *p* bernilai salah adalah $x \neq 4$ dan $x \neq -4$.

3.4 Negasi

Dari sebarang pernyataan p, dapat dibuat pernyataan lain yang dinamakan negasi p, dan dilambangkan dengan ~p. ~ p dapat diartikan sebagai tidaklah benar p atau menyisipkan kata tidak dalam p.

Definisi *:* *Jika p pernyataan yang bernilai benar maka negasi p pernyataan yang bernilai salah dan sebaliknya, jika p pernyataan yang bernilai salah maka negasi p pernyataan yang bernilai benar.*

Dari pernyataan tunggal p yang diketahui, dapat dibuat pernyataan lain yang disebut ingkaran/negasi dari p dengan menempatkan perkataan “tidak benar “di depan pernyataan p atau dengan menyisipkan kata “tidak “di dalam pernyataan p .Ingkaran dari pernyataan p dilambangkan dengan ~ p. Jika p bernilai benar maka ~p bernilai salah atau sebaliknya.

Contoh:

1. Jika p : “ 12321 habis dibagi 3”
   maka ~ p : “ 12321 tidak habis dibagi 3”
2. Jika p :Semua burung pandai terbang
   maka ~ p :Tidak benar semua burung pandai terbang
   atau ~ p :Beberapa burung tidak pandai terbang.
3. Jika p : $2 + 5 > 7$
   maka ~ p : $2 + 5 < 7$
   atau ~ p : $2 + 5 \leq 7$
4. Jika p : Jakarta ibu kota RI
   Maka ~ p : Tidak benar bahwa Jakarta ibu kota RI
   Atau ~ p : Jakarta bukan ibu kota RI
5. Jika q : Zainal memakai kaca mata
   Maka ~ q : Tidak benar bahwa Zainal memakai kaca mata
   Atau ~ q : Zainal tidak memakai kaca mata
6. Jika r : $2 + 3 > 6$ (S)
   maka ~r : Tidak benar bahwa $2 + 3 > 6$ (B)
   atau ~ r : $2 + 3 \leq 6$ (B)
7. Jika s : Ada anak berkacamata di kelasku (B)
   maka ~ s : Tidak benar bahwa ada anak berkacamata di kelasku (S).

Membentuk ingkaran suatu pernyataan dapat dengan menambahkan kata-kata tidak benar bahwa di depan pernyataan aslinya, atau jika mungkin dengan menambah bukan atau tidak di dalam pernyataan itu, tetapi untuk pernyataan-pernyataan tertentu tidak demikian halnya.

Ketentuan tentang nilai kebenaran dari ingkaran, disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 3.3 Kebenaran Negasi

p	~ p
B	S
S	B

Contoh:

Jika *p*, *q*, dan *r* adalah proposisi. Bentuklah tabel kebenaran dari ekspresi logika $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$.

Penyelesaian:

Ada 3 buah proposisi atomik di dalam ekspresi logika dan setiap proposisi hanya mempunyai 2 kemungkinan nilai, sehingga jumlah kombinasi dari semua proposisi tersebut adalah $2 \times 2 \times 2 = 8$ buah. Tabel kebenaran dari proposisi $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$ ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 3.4 Tabel Kebenaran $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
B	B	B	B	S	S	B
B	B	S	B	S	S	B
B	S	B	S	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	S	S	S
S	B	S	S	S	S	S
S	S	B	S	B	B	B
S	S	S	S	B	S	S

3.5 Implikasi (Proposisi Bersyarat)

Selain dalam bentuk konjungsi, disjungsi, dan negasi, proposisi majemuk juga dapat muncul berbentuk “jika p, maka q”, seperti pada contoh-contoh berikut:

a. Jika adik lulus ujian, maka ia mendapat hadiah dari ayah.
b. Jika suhu mencapai 80 derajat C, maka alarm berbunyi.
c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Pernyataan berbentuk “jika p, maka q” semacam itu disebut proposisi bersyarat atau kondisional atau implikasi.

Definisi *Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk “jika p, maka q” disebut proposisi bersyarat (implikasi) dan dilambangkan dengan*

$p \rightarrow q$

Proposisi p disebut hipotesis (atau antesenden atau premis atau kondisi) dan proposisi disebut konklusi (atau konsekuen).

Dua pernyataan tunggal p dan q dapat dikomposisi dengan menggunakan kata hubung “Jika …. Maka …. ” untuk membentuk pernyataan majemuk yang di sebut Implikasi atau pernyataan bersyarat. Implikasi:” Jika p maka q “ dilambangkan dengan “p $\Rightarrow$ q “ (dibaca Jika p maka q)

Implikasi p $\Rightarrow$ q dapat juga dibaca sebagai:

(i) p hanya jika q
(ii) q jika p
(iii) p syarat cukup bagi q
(iv) q syarat perlu bagi p

Dalam implikasi p ⇒ q, pernyataan p disebut alasan atau sebab (*antecedent*), dan pernyataan q sering disebut kesimpulan atau akibat (*consequent*).

Nilai kebenaran suatu Implikasi ditentukan oleh pernyataan pernyataan penyususnnya. Jika pernyataan p bernilai benar dan pernyataan q bernilai salah maka p ⇒ q bernilai salah, jika tidak demikian maka p ⇒ q bernilai benar. Ketentuan tersebut dapat dinyatakan dalam tabel kebenaran sebagai berikut:

Tabel 3.5 Nilai Kebenaran Implikasi

p	q	p ⇒ q
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Tabel kebenaran implikasi ditunjukkan pada Tabel di atas bahwa implikasi p ⇒ q hanya salah jika p benar tetapi q salah, selain itu implikasi bernilai benar. Tidak sukar memahami mengapa tabel kebenaran implikasi demikian. Hal ini dijelaskan dengan contoh analogi berikut:

Misalkan dosen anda berkata kepada mahasiswanya di dalam kelas "Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah logika matematika". Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong? Tinjau empat kasus berikut ini:

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar). Pada kasus ini, pernyataan dosen anda benar.

Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah). Pada kasus ini, dosen anda berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar). Pada kasus ini, dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah). Pada kasus ini dosen anda benar.

Implikasi $p \Rightarrow q$ memainkan peranan penting dalam penalaran. Implikasi ini tidak hanya diekspresikan dalam pernyataan standard "jika *p*, maka *q*" tetapi juga dapat diekspresikan dalam berbagai cara, antara lain:

(b) Jika *p*, maka *q* (*if p, then q*)

(c) Jika *p*, *q* (*if p*, *q*)

(d) *p* mengakibatkan *q* (*p implies q*)

(e) *q* jika *p*(*q if p*)

(f) *p* hanya jika *q* (*p only if q*)

(g) *p* syarat cukup agar *q* (*p is sufficient for q*)

(h) *q* syarat perlu bagi *p* (*q is necessary for p*)

(i) (i) *q* bilamana *p* (*q whenever p*)

Contoh:

1. "Jika 2 + 2 = 5 maka 5 Bilangan prima" (benar)
2. " Jika 2+3 = 5 maka 5 bukan bilangan prima " (salah)
3. "Jika 2 + 2 = 5 maka 5 bukan bilangan prima " (benar)

Dalam bahasa sehari-hari kita memakai implikasi dalam bermacam-macam arti, misalnya:

3. Bila kamu tidak membeli karcis, maka kamu tidak akan diperbolehkan masuk.
4. Bila kehujanan, maka Tono pasti sakit.
5. Bila bel berbunyi, maka mahasiswa masuk ke dalam ruang kuliah.
6. Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
7. Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
8. Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
9. Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
10. Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.

Contoh:

1. Bila Anindita adalah seorang pria, maka ia akan mempunyai kumis.
2. Bila bumi berputar dari timur ke barat maka matahari akan terbit disebelah barat.
3. Bila berat jenis besi lebih dari satu, maka ia akan terapung dalam air.
4. Bila berat jenis besi lebih besat dari satu, maka ia akan terapung dalam air.
5. Bila $3 > 2$, maka $6 > 4$
6. Bila $3 < 2$, maka $-3 > -2$
7. Bila $x > 10$, maka $x > 5$

Contoh:

1. a= 9 adalah suatu bilangan kuadrat (B).
   b= 6 mempunyai dua faktor prima (B).

$a \Rightarrow b$= Jika 9 adalah suatu bilangan kuadrat maka 6 mempunyai dua faktor prima (B).

2. p= Semarang Ibu Kota provinsi Jawa Tengah (B).
   q= Tuti adalah presiden RI (S).
   $p \Rightarrow q$ Jika Semarang Ibu Kota provinsi Jawa Tengah maka Tuti adalah Presiden RI (S).
3. v= Matahari terbit dari Barat (S).
   w= Indonesia merdeka pada tahun 1945 (B).
   $v \Rightarrow w$= Jika matahari terbit dari Barat maka Indonesia merdeka pada tahun 1945 (B).
4. m= 5 lebih besar dari 9 (S).
   n= 9 adalah suatu bilangan prima (S).
   $m \Rightarrow n$= Jika 5 lebih besar dari 9 maka 9 adalah suatu bilangan prima (B).

Apabila pengikut suatu implikasi bernilai B maka implikasi itu bernilai B, tanpa memperhatikan nilai kebenaran dari pendahulunya.

Contoh.
Misalkan
x : Anda berusia 17 tahun
y : Anda dapat memperoleh SIM
Nyatakan preposisi berikut ke dalam notasi implikasi:

(a) Hanya jika anda berusia 17 tahun maka anda dapat memperoleh SIM.
(b) Syarat cukup agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
(c) Syarat perlu agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
(d) Jika anda tidak dapat memperoleh SIM maka anda tidak berusia 17 tahun.

(e) Anda tidak dapat memperoleh SIM bilamana anda belum berusia 17 tahun.

Penyelesaian:

(a) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Anda dapat memperoleh SIM hanya jika anda berusia 17 tahun". Ingat kembali bahwa $p \rightarrow q$ bisa dibaca "p hanya jika q". Jadi, pernyataan yang diberikan dilambangkan dengan $y \rightarrow x$.

(b) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Anda berusia 17 tahun adalah syarat cukup untuk dapat memperoleh SIM". Ingat kembali bahwa $p \rightarrow q$ bisa dibaca "p syarat cukup untuk q". Jadi, pernyataan yang diberikan dilambangkan dengan $x \rightarrow y$.

(c) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Anda berusia 17 tahun adalah syarat perlu untuk dapat memperoleh SIM". Ingat kembali bahwa $p \rightarrow q$ bisa dibaca "q syarat perlu untuk q". Jadi, pernyataan yang diberikan dilambangkan dengan $y \rightarrow x$.

(d) $\sim y \rightarrow \sim x$

Ingat kembali bahwa $p \rightarrow q$ bisa dibaca "q bilamana p". Jadi, pernyataan yang diberikan dilambangkan dengan $\sim x \rightarrow \sim y$.

Contoh:

Tunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$.

Penyelesaian:

Tabel berikut ini memperlihatkan bahwa memang benar $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$. Dengan kata lain, pernyataan "Jika p maka q" ekivalen secara logika dengan "Tidak p atau q".

Tabel 3.6 Kebenaran $p \rightarrow q$ dan $\sim p \vee q$.

P	q	~p	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
B	B	S	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B

3.6 Biimplikasi

Proposisi bersyarat penting lainnya adalah berbentuk “p jika dan hanya jika q” yang dinamakan bikondisional atau bi-implikasi. Definisi bikondisional dikemukakan sebagai berikut.

Definisi Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk “p jika dan hanya jika q” disebut bikondisional (bi-implikasi) dan dilambangkan dengan $p \leftrightarrow q$.

Dari dua pernyataan p dan q yang diketahui dapat dibuat pernyataan majemuk dalam bentuk “ p jika dan hanya jika q” yang disebut dengan BiImplikasi atau ekuivalensi (Implikasi dwi arah).

Ekuivalensi “P jika dan hanya jika q” dinyatakan dengan lambang “ $p \Leftrightarrow q$ “

Ekuivalensi $p \Leftrightarrow q$ dapat juga dibaca:

(i) jika p maka q dan jika q maka p
(ii) p syarat perlu dan cukup bagi q
(iii) q syarat perlu dan cukup bagi p

Ekuivalensi $p \Leftrightarrow q$ menegaskan bahwa:
jika p benar maka q benar dan jika p salah maka q salah

Ketentuan tentang nilai kebenaran suatu Biimplikasi, disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 3.7 Nilai Kebenaran Biimplikasi

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Dari tabel kebenaran dapat kita ketahui bahwa: Ekuivalensi $p \Leftrightarrow q$ benar jika, p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama, jika p dan q mempunyai nilai kebenaran yang berlawan maka Biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ bernilai salah.

Perhatikan bahwa bikondisional $p \leftrightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Keekivalenan tersebut ditunjukkan pada tabel berikut. Dengan kata lain, pernyataan "*p* jika dan hanya jika *q*" dapat dibaca "Jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*".

Tabel 3.8 $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
B	B	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S
S	B	S	B	S	S
S	S	B	B	B	B

Terdapat sejumlah cara untuk menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$ dalam kata-kata, yaitu:

(a) *p* jika dan hanya jika *q* (*p if and only if q*)

(b) *p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q* (*p is necessary and sufficient for q*)

(c) Jika p maka q, dan sebaliknya (*if p then q, and conversely*)
(d) *p iff q*

Contoh:

Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

(a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.
(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.
(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.
(d) Bandung terletak di Jawa Barat jika Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia

Contoh:

Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk "*p* jika dan hanya jika *q*":

(a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.
(b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.
(c) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.
(d) Jika anda lama menonton televisi maka mata anda lelah, begitu sebaliknya.
(e) Kereta api datang terlambat tepat pada hari-hari ketika saya membutuhkannya.

Penyelesaian:

(a) Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.
(b) Anda melakukan banyak latihan adalah syarat perlu dan cukup untuk anda memenangkan pertandingan.
(c) Anda naik jabatan jika dan hanya jika anda punya koneksi.

(d) Mata anda lelah jika dan hanya jika anda lama menonton televisi.
(e) Kereta api datang terlambat jika dan hanya jika saya membutuhkan kereta hari itu.

Contoh:

Suatu segitiga disebut sama kaki bila dan bila segitiga itu mempunyai dua sisi yang sama panjang (maksudnya suatu ekuivalensi:”bila dan hanya bila”)

Contoh:

1. Jika p : 2 bilangan genap (B)

   q : 3 bilangan ganjil (B)

   maka $p \Leftrightarrow q$: 2 bilangan genap jika hanya jika 3 bilangan ganjil (B)
2. Jika r : $2 + 2 \neq 5$ (B)

   s : $4 + 4 < 8$ (S)

   maka $r \Leftrightarrow s$: $2 + 2 \neq 5$ jika hanya jika $4 + 4 < 8$ (S)
3. Jika a : Surabaya ada di jawa barat (S)

   b : $23 = 6$ (S)

   maka $a \Leftrightarrow b$: Surabaya ada di jawa barat jika hanya jika $23 = 6$ (B)

Contoh.

Untuk menerangkan mutu sebuah hotel, misalkan *p* : Pelayanannya baik, dan *q* : Tarif kamarnya murah, *r* : Hotelnya berbintang tiga.

Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik (menggunakan *p*, *q*, *r*):

(a) Tarif kamarnya murah, tapi pelayanannya buruk.

(b) Salah bahwa hotel berbintang tiga berarti tarif kamarnya murah dan pelayanannya buruk.

Penyelesaian:

a. $q \wedge \sim p$

(b) $\sim (r \rightarrow (q \wedge \sim p))$

3.7 Ingkaran Atau Negasi Pernyataan Majemuk

Berikut ini adalah pembahasan tentang negasi pernyataan majemuk, yaitu negasi suatu konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi

1. Negasi Suatu Konjungsi

Karena suatu konjungsi p ∧ q akan bernilai benar hanya jika kedua komponennya bernilai benar. Maka negasi suatu konjungsi p ∧ q adalah ~p ∨ ~q; sebagaimana ditunjukkan tabel kebenaran berikut:

Tabel 3.9 ~p ∨ ~q

p	q	p ∧ q	~p	~q	~p ∨ ~q
B	B	B	S	S	S
B	S	S	S	B	B
S	B	S	B	S	B
S	S	S	B	B	B

2. Negasi Suatu Disjungsi

Negasi suatu disjungsi p ∨ q adalah ~p ∧ ~q sebagaimana ditunjukkan tabel kebenaran berikut:

Tabel 3.10 $\sim p \wedge \sim q$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	B	S	S	S
B	S	B	S	B	S
S	B	B	B	S	S
S	S	S	B	B	B

3. Negasi Suatu Implikasi

Negasi suatu implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $p \wedge \sim q$ seperti ditunjukkan tabel kebenaran berikut ini:

Tabel 3.11 $p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
B	B	S	B	S
B	S	B	S	B
S	B	S	B	S
S	S	B	B	S

Dengan demikian, $p \Rightarrow q \equiv \sim[\sim (p \Rightarrow q)] \equiv \sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

4. Negasi Suatu Biimplikasi

Karena biimplikasi atau bikondisional $p \Leftrightarrow q$ ekuivalen dengan$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$; sehingga:

$$
\begin{aligned}
\sim (p \Leftrightarrow q) &\equiv \sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \\
&\equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \\
&\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)] \\
&\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)
\end{aligned}
$$

Tabel kebenaran dari suatu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi di atas merupakan dasar dalam mencari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan majemuk seperti di saat menentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk $(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q)$ seperti berikut ini.

Tabel 3.12 $(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q)$

p	q	r	~p	~r	$(\sim p \wedge r)$	$(\sim r \Rightarrow q)$	$(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q)$
B	B	B	S	S	S	B	B
B	B	S	S	B	S	B	B
B	S	B	S	S	S	B	B
B	S	S	S	B	S	S	S
S	B	B	B	S	B	B	B
S	B	S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B	B
S	S	S	B	B	S	S	S

3.8 Rangkuman

Pernyataan majemuk ialah pernyataan yang terdiri dari beberapa pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan menggunakan kata hubung.

Sebarang dua pernyataan dapat digabungkan oleh kata "dan" untuk membentuk sebuah pernyataan komposit yang dinamakan konjungsi (konjunction) dari pernyataan semula. Secara simbolik, maka konjungsi dua pernyataan p dan q dinyatakan oleh $p \wedge q$.

Jika p benar dan q benar, maka $p \wedge q$ benar, jika tidak maka $p \wedge q$ salah. Dengan kata lain, konjungsi dua pernyataan hanya benar jika setiap komponen benar.

Jika p benar atau q benar atau p dan q keduanya benar,maka $p \vee q$ benar, jika tidak maka $p \vee q$ salah.

Dalam Logika Matematika juga dibedakan dua macam "atau" yang pertama disebut Disjungsi Inklusif (dengan lambang " $\vee$") dan yang kedua disebut Disjungsi Eksklusif (dengan lambang " $\underline{\vee}$").

Suatu disjungsi inklusif bernilai benar apabila paling sedikit satu komponennya bernilai benar.

Suatu disjungsi eksklusif bernilai benar apabila hanya salah satu komponennya bernilai benar

Jika p pernyataan yang bernilai benar maka negasi p pernyataan yang bernilai salah dan sebaliknya, jika p pernyataan yang bernilai salah maka negasi p pernyataan yang bernilai benar.

Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk "jika p, maka q" disebut proposisi bersyarat (implikasi) dan dilambangkan dengan $p \rightarrow q$

Proposisi p disebut hipotesis (atau antesenden atau premis atau kondisi) dan proposisi disebut konklusi (atau konsekuen).

Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk "p jika dan hanya jika q" disebut bikondisional (bi-implikasi) dan dilambangkan dengan $p \leftrightarrow q$.

Karena suatu konjungsi $p \wedge q$ akan bernilai benar hanya jika kedua komponennya bernilai benar. Maka negasi suatu konjungsi $p \wedge q$ adalah $\sim p \vee \sim q$

Negasi suatu disjungsi $p \vee q$ adalah $\sim p \wedge \sim q$

Negasi suatu implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $p \wedge \sim q$

3.9 Latihan

Selesaikanlah soal –soal di bawah ini!

1. Nyatakan proposisi-proposisi berikut ke dalam lambang-lambang logika dan tentukan nilai kebenarannya, jelaskan!
   a. Ahmad memakai baju berwarna merah atau kuning.
   b. Syarat perlu dan cukup dua buah segitiga kongruen adalah bentuk dan ukurannya sama
   c. Syarat perlu untuk bisa menjadi mahasiswa program

studi matematika adalah mengikuti ujian masuk dan membayar SPP

d. Jika hujan turun maka jalan licin
e. 2 adalah bilangan prima jika dan hanya jika $4 > 3$
f. Bukan Amir yang mahasiswa matematika tetapi Aminah.
g. 12 habis dibagi 3, jika Ahmad anak pak Camat.

2. Apabila p dan q masing-masing adalah pernyataan, buatlah tabel kebenaran dari pernyataan majemuk berikut ini, untuk bermacam-macam nilai kebenaran dari p dan q.
   a. $p \wedge \sim q$
   b. $\sim p \wedge p$
   c. $q \vee \sim q$
   d. $\sim p \vee q$
   e. $(p \wedge q) \vee \sim p$
3. Misalkan,
   p : 15 terbagi habis 3, dan
   q : 27 adalah suatu bilangan prima
   Tuliskanlah pernyataan-pernyataan berikut ini dalam kalimat sehari-hari dan tentukan nilai kebenaran!
   a. $\sim p$
   b. $\sim q$
   c. $p \wedge \sim q$
   d. $\sim p \vee q$
   e. $\sim p \wedge \sim q$
   f. $p \vee \sim q$
   g. $\sim (\sim p)$
   h. $\sim p \wedge q$
4. Diketahui proposisi-proposisi berikut:
   p : Pemuda itu tinggi
   q : Pemuda itu tampan
   Nyatakan proposisi berikut (asumsikan “Pemuda itu pendek”

berarti “Pemuda itu tidak tinggi”) ke dalam ekspresi logika (notasi simbolik):

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

5. Misalkan,

   a : Ida adalah gadis cantik, dan

   b : Ida berambut keriting.

   Tuliskanlah pernyataan-pernyataan berikut ini dengan menggunakan lambang-lambang a, b, $\vee$, $\wedge$, atau ~.

   a. Tidak benar bahwa Ida bukan gadis cantik.
   b. Ida adalah gadis cantik yang berambut keriting.
   c. Ida bukan gadis cantik, tetapi berambut keriting.
   d. Ida adalah gadis cantik yang tidak berambut keriting.
   e. Ida berambut keriting, tetapi bukan gadis cantik.

6. Misalkan, p suatu pernyataan yang bernilai B dan q suatu pernyataan yang bernilai S, serta r suatu pernyataan yang tidak diketahui nilai kebenarannya. Tentukanlah nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berikut ini!

   a. $\sim(\sim p)$
   b. $\sim p \vee q$
   c. $p \vee \sim q$
   d. $\sim p \wedge \sim q$
   e. $\sim q \vee \sim p$
   f. $q \wedge r$
   g. $\sim p \wedge \sim r$
   h. $p \vee r$
   i. $\sim q \vee \sim r$
   j. $(p \wedge q) \wedge r$

7. Misalkan *p* adalah "Iwan bisa berbahasa Inggris", *q* adalah "Iwan bisa berbahasa Jerman" dan *r* adalah "Iwan bisa berbahasa Perancis". Terjemahkan kalimat majemuk berikut ke dalam notasi simbolik:
   (a) Iwan bisa berbahasa Inggris atau Jerman
   (b) Iwan bisa berbahasa Jerman tetapi tidak bahasa Perancis
   (c) Iwan bisa berbahasa Inggris atau bahasa Jerman, atau dia tidak bisa berbahasa Perancis atau bahasa Jerman
   (d) Tidak benar bahwa Iwan bisa berbahasa Inggris atau bahasa Perancis
   (e) Tidak benar bahwa Iwan bisa berbahasa Inggris atau bahasa Perancis tetapi tidak bahasa Jerman
   (f) Tidak benar bahwa Iwan tidak bisa berbahasa Inggris, Perancis, maupun Jerman
8. Untuk menerangkan karakteristik mata kuliah *X*, misalkan
   p : "Kuliahnya menarik", dan
   q : "Dosennya enak",
   r : "Soal-soal ujiannya mudah".

   Terjemahkan proposisi-proposisi berikut dalam notasi simbolik (menggunakan *p, q, r*):
   (a) Kuliahnya tidak menarik, dosennya tidak enak, dan soal-soal ujiannya tidak mudah.
   (b) Kuliahnya menarik atau soal-soal ujiannya tidak mudah, namun tidak keduanya.
   (c) Salah bahwa kuliahnya menarik berarti dosennya enak dan soal-soal ujiannya mudah.
9. Nyatakan apakah setiap implikasi berikut benar atau salah:
   (a) Jika $2 + 2 = 4$, maka $3 + 3 = 5$
   (b) Jika $1 + 1 = 2$, maka Tuhan ada
   (c) Jika $2 + 2 = 4$, maka 4 adalah bilangan prima
   (d) Jika $3 < 6$, maka $6 < 2$

10. Tunjukkanlah dengan tabel kebenaran bahwa nilai kebenaran dari $\sim(\sim a \vee b)$ sama dengan nilai kebenaran dari $a \wedge \sim b$ untuk setiap nilai kebenaran dari a dan b.
11. Lengkapilah tabel kebenaran berikut ini!

p	q	~p	~q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim (p \wedge q)$
B	B	…	…	…	…	…	…	…
B	S	…	…	…	…	…	…	…
S	B	…	…	…	…	…	…	…
S	S	…	…	…	…	…	…	…

12. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut!
    a. Logam jika dipanasi memuai.
    b. Presiden RI pertama adalah Soeharto.
    c. Penduduk Indonesia adalah 210.000
    d. 13 adalah bilangan prima dan 13 merupakan bilangan ganjil.
    e. 12.345 habis dibagi 3 atau habis dibagi 9
    f. Bendera Afrika Selatan ada warna hijau dan warna hitamnya.
    g. $3 + 2 = 6 \Leftrightarrow 4 + 2 = 5$.
    h. $3 + 2 = 5 \Rightarrow 4 + 2 = 5$.
    i. 3 + 2 = 5 atau Jakarta ibukota Jawa Timur

BAB 4
PERNYATAAN MAJEMUK BERSUSUN

Capaian Pembelajaran:
Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami dan menjelaskan:
4.1 Pernyataan Majemuk yang Ekuivalen
4.2 Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi

Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi merupakan submateri dari logika matematika. Untuk menentukan nilai kebenaran suatu bentuk pernyataan majemuk. Nilai kebanaran pernyataan majemuk dapat kita golongkan menjadi tiga yaitu Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi.

4.1 Pernyataan Majemuk yang Ekuivalen

Dua pernyataan majemuk disebut ekuivalen (ekuivalen logis) jika untuk semua kemungkinan dari nilai kebenaran komponen-komponennya, kedua pernyataan majemuk itu mempunyai nilai kebenaran yang sama. Untuk menyelidiki ekuivalen atau tidaknya dua pernyataan majemuk kita mengunakan tabel kebenaran. Untuk menyatakan dua pernyataan ekuivalen dilambangkan dengan “ $\equiv$ ”

Perhatikan kalimat: “Guru pahlawan bangsa” dan “tidak benar bahwa guru bukan pahlawan bangsa”. Kedua kalimat ini akan mempunyai nilai kebenaran yang sama, tidak perduli bagaimana nilai kebenaran dari pernyataan semula. (Coba periksa dengan menggunakan tabel kebenaran).

Definisi: *Dua buah pernyataan dikatakan ekivalen (berekivalensi logis) jika kedua pernyataan itu mempunyai nilai kebenaran yang sama.*

Pernyataan p ekivalen dengan pernyataan q dapat ditulis sebagai $p \equiv q$. Berdasarkan definisi di atas, sifat-sifat pernyataan-pernyataan yang ekivalen (berekivalensi logis) adalah:

1. $p \equiv p$
2. jika $p \equiv q$ maka $q \equiv p$
3. jika $p \equiv q$ dan $q \equiv r$ maka $p \equiv r$

Sifat pertama berarti bahwa setiap pernyataan selalu mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan dirinya sendiri. Sifat kedua berarti bahwa jika suatu pernyataan mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan suatu pernyataan yang lain, maka tentu berlaku sebaliknya. Sedangkan sifat ketiga berarti bahwa jika pernyataan pertama mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan kedua dan pernyataan kedua mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan pernyataan ketiga maka nilai kebenaran pernyataan pertama adalah sama dengan nilai kebenaran pernyataan ketiga.

Pada pernyataan “segi tiga sama sisi” yang ekivalen dengan “segi tiga yang sudutnya sama besar”. Dalam pembuktian pada geometri sering kali kita menggunakan kedua pernyataan itu dengan maksud yang sama.

Contoh.

Buktikan bahwa $p \vee p \equiv p$

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $p \vee p \equiv p$ dapat kita lihat pada tabel kebenaran berikut.

Tabel 4.1 Nilai Kebenaran $p \vee p$

p	$p \vee p$
B	B
S	S

Terbukti bahwa $p \vee p$ dan p memiliki nilai kebenaran yang sama.

Contoh.

Tunjukkan bahwa $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ dapat kita lihat pada tabel kebenaran berikut.

Tabel 4.2 Nilai Kebenaran $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$.

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
B	B	S	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B

Dari tabel di atas terlihat bahwa bahwa $(p \Rightarrow q)$ dan $(\sim p \vee q)$ memiliki nilai kebenaran yang sama.

Contoh:

1. Kita tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa:
   a. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
   b. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ Disebut dalil De Morgan

Penyelesaian:

a. Untuk membuktikan bahwa $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ dapat kita lihat pada tabel kebenaran berikut.

Tabel 4.3 Nilai Kebenaran $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	B

Nilai logisnya sama

Pada kolom ke enam dan ke tujuh terlihat bahwa pernyataan majemuk itu untuk semua nilai kemungkinan p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama.

b. Untuk membuktikan bahwa $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ dapat kita lihat pada tabel kebenaran berikut.

Tabel 4.4 Nilai Kebenaran $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \wedge q)$	$\sim(p \wedge q)$	$(\sim p \vee \sim q)$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B

Nilai logisnya sama

Pada kolom ke enam dan ke tujuh terlihat bahwa pernyataan majemuk itu untuk semua nilai kemungkinan p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama.

Contoh:

a. Ingkaran dari: " Hari ini hujan dan angin bertiup kencang "
   Adalah: " Hari ini tidak hujan atau angin bertiup tidak kencang"
b. Ingkaran dari:"2 + 2 = 5 atau 5 bilangan prima "
   Adalah: " $2 + 2 \neq 5$ dan 5 bukan bilangan prima"

2. Kita tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

Tabel 4.5 Nilai Kebenaran $\sim(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$

p	q	~ q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \sim q)$
B	B	S	B	S	S
B	S	B	S	B	B
S	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	S

Nilai logisnya sama

Dari tabel kolom kelima dan keenam terlihat bahwa kedua pernyataan majemuk di atas ekuivalen.

Contoh.

a. Ingkaran dari " Jika hari hujan maka jalan basah"
   Adalah: " Hari hujan dan jalan tidak basah"
   Atau " hari hujan tetapi jalan tidak basah"
b. Ingkaran dari:" Jika mandor tidak datang maka semua kuli senang"

Adalah: " Mandor tidak datang tetapi ada kuli yang tidak senang"

4.2 Hukum-Hukum Logika Proposisi

Proposisi, dalam kerangka hubungan ekivalensi logika, memenuhi sifat-sifat yang dinyatakan dalam sejumlah hukum pada tabel berikut. Beberapa hukum tersebut mirip dengan hukum aljabar pada sistem bilangan riil, misalnya a(b + c) = ab + bc, yaitu hukum distributif, sehingga kadang-kadang hukum logika proposisi dinamakan juga hukum-hukum aljabar proposisi.

Jika p, q dan r suatu pernyataan dan B, S masing-masing menyatakan benar dan salah, maka berlaku:

Tabel 4.6 Kebenaran Hukum- Hukum Logika

1. Hukum identitas: *(i)* $p \vee B \Leftrightarrow p$ *(ii)* $p \wedge S \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: (i) $p \wedge S \Leftrightarrow S$ (ii) $p \vee B \Leftrightarrow B$
3. Hukum negasi: (i) $p \vee \sim p \Leftrightarrow B$ (ii) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow S$	4. Hukum idempoten: *(i)* $p \vee p \Leftrightarrow p$ *(ii)* $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): *(i)* $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ *(ii)* $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif: *(i)* $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ *(ii)* $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: (i) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: (ii $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ii) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: (i) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (ii) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Hukum-hukum logika di atas bermanfaat untuk membuktikan logika, khususnya pada proposisi majemuk yang mempunyai banyak proposisi atomik. Bila suatu proposisi majemuk mempunyai n buah porposisi atomik, maka tabel kebenarannya terdiri dari 2^n baris. Untuk n yang besar jelas tidak praktis menggunakan tabel kebenaran, misalnya keekivalenan dua buah proposisi. Selain menggunakan tabel kebenaran, keekivalenan dapat dibuktikan dengan hukum-hukum untuk $n = 10$ terdapat 2^{10} baris di dalam tabel kebenarannya.

Contoh:
Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

Penyelesaian:

$p \vee \sim(p \vee q) \Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De Mogran)

$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum distributif)

$\Leftrightarrow T \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum negasi)

$\Leftrightarrow p \vee \sim q$ (Hukum identitas)

Contoh:
Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee F) \wedge (p \vee q)$ (Hukum Identitas)

$\Leftrightarrow p \vee (F \wedge q$(Hukum distributif)

$\Leftrightarrow p \vee F$(Hukum *Null*)

$\Leftrightarrow p$ (Hukum Identitas)

4.3 Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi

1. Tautologi

Perhatikan bahwa beberapa pernyataan selalu bernilai benar.

Contoh.

Pernyataan: “Ahmad adalah mahasiswa atau Ahmad bukan mahasiswa” akan selalu bernilai benar tidak bergantung pada apakah Ahmad benar-benar mahasiswa atau bukan mahasiswa.

Jika p : Ahmad adalah mahasiswa, dan

~p : Ahmad bukan mahasiswa,

Maka pernyataan di atas berbentuk $p \vee \sim p$. (coba periksa nilai kebenarannya dengan menggunakan tabel kebenaran). Setiap pernyataan yang bernilai benar, untuk setiap nilai kebenaran komponen-komponennya, disebut tautologi.

Definisi: *Tautologi adalah suatu pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar, untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya.*

Proposisi tautologi dicirikan pada kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat nilai benar.

Contoh.

Misalkan

p : $2 + 2 = 4$ dan

~p : $2 + 2 \neq 4$

Maka $p \vee \sim p$: $2 + 2 = 4$ atau $2 + 2 \neq 4$ bernilai benar.

Kebenaran contoh di atas dapat dijelaskan sebagai berikut:

Tabel 4.7 Nilai Kebenaran $p \vee {\sim}p$

p	${\sim}p$	$p \vee {\sim}p$
B	S	B
S	B	B

Contoh.

Periksa bahwa pernyataan majemuk "$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ Adalah suatu tautologi.

Penyelesaian:

Dengan menyusun tabel nilai kebenarannya:

Tabel 4.8 Nilai Kebenaran $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	B
S	B	S	B	B
S	S	S	S	B

Tampak pada kolom terakhir dari Tabel di atas bahwa pernyataan majemuk $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ selalu bernilai B (benar) sehingga pernyataan majemuk itu merupakan suatu tautologi.

Contoh.

Misalkan *p* dan *q* adalah proposisi. Proposisi majemuk $p \vee {\sim}(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi. Gunakan tabel kebenaran untuk menganalisis.

Penyelesaian:

Dengan menyusun tabel nilai kebenarannya:

Tabel 4.9 $p \vee \sim(p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
B	B	B	S	B
B	S	S	B	B
S	B	S	B	B
S	S	S	B	B

Tampak pada kolom terakhir dari tabel di atas bahwa pernyataan majemuk $p \vee \sim(p \wedge q)$ selalu bernilai B (benar) sehingga pernyataan majemuk itu merupakan suatu tautologi.

Contoh.
Gunakan tabel kebenaran untuk menganalisis bahwa pernyataan $p \vee [(p \wedge \sim q) \Rightarrow r]$ merupakan tautologi.

Penyelesaian:
Dengan menyusun tabel nilai kebenarannya:

Tabel 4.10 Nilai Kebenaran $p \vee [(p \wedge \sim q) \Rightarrow r]$

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$	$p \vee [(p \wedge \sim q) \Rightarrow r]$
B	B	B	S	S	B	B
B	B	S	S	S	B	B
B	S	B	B	B	B	B
B	S	S	B	B	S	B
S	B	B	S	S	B	B
S	B	S	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B
S	S	S	B	S	B	B

Tampak pada kolom terakhir dari Tabel di atas bahwa pernyataan majemuk $p \vee [(p \wedge \sim q) \Rightarrow r]$ selalu bernilai B (benar) sehingga pernyataan majemuk itu merupakan suatu tautologi.

2. Kontradiksi

***Definisi**: Kontradiksi adalah pernyataan komposit yang selalu bernilai salah.*

Sekarang perhatikan kalimat: “Pratiwi seorang mahasiswa dan bukan mahasiswa”. Pernyataan ini selalu bernilai salah, tidak tergantung pada nilai kebenaran dari “Pratiwi seorang mahasiswa” maupun “Pratiwi bukan mahasiswa”.

Jika r : Pratiwi mahasiswa maka ~ r : Pratiwi bukan mahasiswa maka pernyataan di atas berbentuk r $\wedge$ ~ r (Coba periksa nilai kebenarannya dengan menggunakan tabel kebenaran).

Setiap pernyataan yang selalu bernilai salah, untuk setiap nilai kebenaran dari komponen-komponen disebut kontradiksi. Karena kontradiksi selalu bernilai salah, maka kontradiksi merupakan ingkaran dari tautologi dan sebaliknya.

Contoh:

p : $2 + 2 = 4$ dan

~p : $2 + 2 \neq 4$

Maka p $\wedge$ ~p : $2 + 2 = 4$ dan $2 + 2 \neq 4$ bernilai salah.

Kebenaran contoh di atas dapat dijelaskan sebagai berikut:

Tabel 4.11 Nilai Kebenaran p $\wedge$ ~p

p	~p	p $\wedge$ ~p
B	S	S

S	B	S

Tampak pada kolom terakhir dari tabel di atas bahwa pernyataan majemuk p ∧ ~p selalu bernilai S (Salah) sehingga pernyataan majemuk itu merupakan suatu kontradiksi.

Contoh.
Gunakan tabel kebenaran untuk menganalisis bahwa pernyataan (p ∧ ~q) ∧ (~p ∨ q) merupakan kontradiksi.

Penyelesaian:
Dengan menyusun tabel nilai kebenarannya:

Tabel 4.12 Nilai Kebenaran (p ∧ ~q) ∧ (~p ∨ q)

p	q	~p	~q	p∧~q	~p∨q	(p ∧ ~q) ∧ (~p ∨ q)
B	B	S	S	S	B	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	S	B	S
S	S	B	B	S	B	S

Tampak pada kolom terakhir dari tabel di atas bahwa pernyataan majemuk (p ∧ ~q) ∧ (~p ∨ q)selalu bernilai S (Salah) sehingga pernyataan majemuk itu merupakan suatu kontradiksi.

Contoh.
Gunakan tabel kebenaran untuk menganalisis bahwa pernyataan $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ merupakan kontradiksi.

Penyelesaian:
Dengan menyusun tabel nilai kebenarannya:

Tabel 4.13 Nilai Kebenaran $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

p q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
B B	B	B	S	S
B S	S	B	S	S
S B	S	B	S	S
S S	S	S	B	S

Tampak pada kolom terakhir dari tabel di atas bahwa pernyataan majemuk $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$selalu bernilai S (Salah) sehingga pernyataan majemuk itu merupakan suatu kontradiksi.

3. Kontigensi

Berikutnya merupakan proposisi majemuk yang tidak selalu bernilai benar dan tidak selalu bernilai salah. Proposisi majemuk ini disebut kontingensi. Kontingensi adalah suatu proposisi majemuk dengan nilai kebenaran benar (B) dan salah (S). Nilai kebenaran ini tergantung dari nilai kebenaran proposisi tunggal pembentuknya dan operator logika penghubungnya. Sama seperti kedua bahasan sebelumnya, proposisi majemuk yang termasuk kontingensi dapat dilihat melalui tabel kebenaran.

Contoh.

Periksa nilai kebenaran dari ekspresi logika $(p \wedge q) \leftrightarrow p$! apakah Kontingensi ?

Penyelesaian:

Dengan menyusun tabel nilai kebenarannya:

Tabel 4.14 Nilai Kebenaran $(p \wedge q) \leftrightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow p$

B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	S
S	S	S	B

Dari tabel nilai kebenaran di atas terlihat $(p \wedge q) \leftrightarrow p$ adalah Kontingensi, karena merupakan proposisi majemuk dengan nilai kebenaran benar (B) dan salah (S).

Contoh.

Periksa nilai kebenaran dari ekspresi logika $\sim(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$! apakah Kontingensi ?

Penyelesaian:

Dengan menyusun tabel nilai kebenarannya:

Tabel 4.15 Nilai Kebenaran $\sim(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$
B	B	S	B	S	S	S
B	S	B	S	B	B	B
S	B	S	B	S	S	S
S	S	B	B	S	S	S

Dari tabel nilai kebenaran di atas terlihat $\sim(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$ adalah Kontingensi, karena merupakan proposisi majemuk dengan nilai kebenaran benar (B) dan salah (S).

4.4 Rangkuman

Dua buah pernyataan dikatakan ekivalen (berekivalensi logis) jika kedua pernyataan itu mempunyai nilai kebenaran yang sama.

Tautologi adalah suatu pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar, untuk setiap nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya.

Kontradiksi adalah pernyataan komposit yang selalu bernilai salah.

Kontigensi adalah suatu proposisi majemuk dengan nilai kebenaran benar (B) dan salah (S). Nilai kebenaran ini tergantung dari nilai kebenaran proposisi tunggal pembentuknya dan operator logika penghubungnya. Sama seperti kedua bahasan sebelumnya, proposisi majemuk yang termasuk kontingensi dapat dilihat melalui tabel kebenaran.

4.5 Latihan

1. Tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa pernyataan majemuk berikut ekuivalen (ekuivalen logis).
   a. $p \Rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$
   b. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   c. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
2. Buktikan bahwa $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ adalah tautologi.
3. Tunjukkan untuk setiap pernyataan berikut merupakan tautologi
   a. $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
   b. $\sim q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$
   c. $\sim p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$
   d. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$
   e. $p \wedge q \Rightarrow p$
   f. $p \Rightarrow p \vee q$
   g. g. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

h. h. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

i. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$

j. $(p \Rightarrow q \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$

k. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$

l. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$

m. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

n. $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

4. Tunjukkan bahwa $p \underline{\vee} q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
5. Tunjukkan untuk setiap pernyataan berikut merupakan kontradiksi.

a. $p \wedge q \wedge \sim p$

b. $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$

6. Lengkapilah tabel kebenaran di bawah ini!

p	q	~q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$
B	B	...	...	...	...	...
B	S	...	...	...	...	...
S	B	...	...	...	...	...
S	S	...	...	...	...	...

BAB 5

KONVERSI, INVERSI, KONTRAPOSISI

Capaian Pembelajaran:
Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami dan menentukan Konversi, Inversi, dan Kontraposisi.

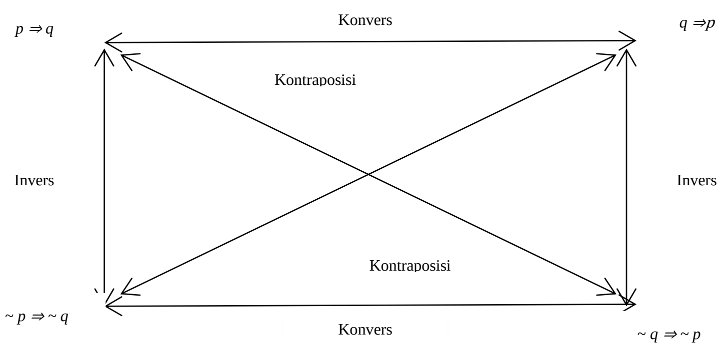
Konvers, Invers dan Kontraposisi adalah bagian dari Implikasi seperti yang sudah dibahas dalam Logika Matematika. Konvers, Invers dan Kontraposisi adalah suatu pernyataan Implikasi baru dari suatu pernyataan implikasi.

5.1 Konvers, Invers dan Kontraposisi

Dari suatu Implikasi $p \Rightarrow q$ dapat di susun pernyataan baru bentuk

Definisi: *Konvers dari implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $q \Rightarrow p$*
Invers dari implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $\sim p \Rightarrow \sim q$
Kontraposisi dari implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $\sim q \Rightarrow \sim p$

Hubungan antara konvers, invers dan kontraposisi dapat ditunjukkan dengan gambar berikut ini.



Gambar 5.1 Hubungan Konvers, Invers dan Kontraposisi

Tabel nilai kebenaran konvers, invers dan kontraposisi dapat ditunjukkan berikut ini.

Tabel 5.1 Nilai Kebenaran Konvers, Invers dan Kontraposisi

				Implikasi	Konvers	Invers	Kontraposisi
p	q	~p	~q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Nilai logisnya sama

Dari tabel dapat kita lihat bahwa

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

$$q \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$$

Contoh:

Implikasi " Jika 2 + 5 = 7 maka 7 bilangan ganjil "
adalah ekuivalen dengan
" Jika 7 bukan bilangan ganjil maka $2 + 5 \neq 7$

Contoh:

Tentukan konvers, nilai kebenaran dari implikasi dan konversnya dari implikasi berikut ini!

1. "Jika 7 membagi habis 15 maka 11 adalah suatu bilangan prima".
2. "Jika 5 + 7 = 13 maka Siti naik kelas".

Penyelesaian:

1. “Jika 7 membagi habis 15 maka 11 adalah suatu bilangan prima” adalah suatu implikasi yang bernilai B. Konvers dari implikasi itu adalah “Jika 11 adalah suatu bilangan prima maka 7 membagi habis 15” bernilai S.
2. Implikasi “Jika 5 + 7 = 13 maka Siti naik kelas” bernilai B, sebab pendahulunya “5 + 7 = 13” bernilai S meskipun pengikutnya “Siti naik kelas” tidak diketahui nilai kebenarannya. Konversnya adalah “Jika Siti naik kelas maka 5 + 7 = 13” dan nilai kebenarannya tidak dapat ditentukan. Jika pernyataan “Siti naik kelas” bernilai B maka konvers itu bernilai S, dan jika pernyataan “Siti naik kelas” bernilai S maka konvers itu bernilai B. Oleh karena pernyataan “Siti naik kelas” tidak dapat diketahui nilai kebenarannya maka konvers itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Suatu implikasi, selain dapat dibentuk konversnya, dapat pula dibentuk implikasi baru lainnya. Perhatikan contoh implikasi berikut ini! “Jika Ani dapat mengendarai sepeda maka Ani mendapat hadiah”.

Misalnya,
a = Ani dapat mengendarai sepeda.
b = Ani mendapat hadiah.
Negasi dari pernyataan-pernyataan itu adalah:
~ a = Ani tidak dapat mengendarai sepeda.
~ b = Ani tidak mendapat hadiah.

Implikasi baru yang ingin dibentuk “$\sim a \Rightarrow \sim b$”, yaitu “Jika Ani tidak dapat mengendarai sepeda maka Ani tidak mendapat hadiah”. Implikasi baru ini disebut invers dari implikasi semula.

Contoh:

Tuliskan invers dari implikasi-implikasi berikut ini dan tentukan pula nilai kebenaran dari implikasi dan inversnya!

1. Jika 5 adalah faktor prima dari 30 maka 30 adalah kelipatan dari 5"
2. Jika Denpasar terletak di pulau Jawa maka Surabaya Ibu Kota provinsi Jawa Timur.

Penyelesaian:

1. Nilai kebenaran dari implikasi itu adalah B.
   Inversnya adalah "Jika 5 bukan faktor prima dari 30 maka 30 bukan kelipatan dari 5" bernilai B.
2. Nilai kebenaran dari implikasi itu adalah B.
   Inversnya adalah "Jika Denpasar tidak terletak di pulau Jawa maka Surabaya bukan Ibu Kota provinsi Jawa Timur" dan bernilai S.

Dari suatu implikasi, selain dapat dibentuk konvers dan inversnya, dapat pula dibentuk implikasi baru yang lain. Yaitu pendahulu dan pengikutnya dari implikasi yang diketahui masing-masing dinegasikan dan selanjutnya ditukarkan tempatnya. Implikasi baru yang terbentuk ini disebut kontrapositif dari implikasi yang diketahui.

Contoh:
Diketahui "Jika Dita rajin belajar maka Dita naik kelas".
a = Dita rajin belajar (pendahulunya)
b = Dita naik kelas (pengikutnya)
maka negasi kalimat di atas adalah:
~ a = Dita tidak rajin belajar.
~ b = Dita tidak naik kelas.
Implikasi tersebut dapat ditulis dengan lambang "a $\Rightarrow$ b". Kontrapositif dari implikasi ini adalah "~b $\Rightarrow$~a" adalah

"Jika Dita tidak naik kelas maka Dita tidak rajin belajar".

Contoh:

Tentukanlah nilai kebenaran dari implikasi-implikasi berikut ini! Tentukan pula kontrapositifnya dan nilai kebenaran dari kontrapositif itu!

1. Jika 6 bilangan prima maka 15 terbagi habis oleh 6.
2. Jika 7 adalah faktor dari 16 maka 16 kelipatan dari 8.
3. Jika Jakarta Ibu Kota RI maka Medan terletak di Iran Jaya.
4. Jika matahari terbit dari Barat maka Rudi lulus ujian.

Penyelesaian:

1. Implikasi itu bernilai B karena baik pendahulu maupun pengikut, masing-masing bernilai S.

   Kontrapositifnya adalah "Jika 15 tidak terbagi habis oleh 6 maka 6 bukan bilangan prima" dan mempunyai nilai kebenaran B.
2. Implikasi bernilai B karena pendahulunya bernilai S dan pengikutnya bernilai B.

   Kontrapositifnya adalah "Jika 16 bukan kelipatan dari 8 maka 7 bukan faktor dari 16", dan mempunyai nilai kebenaran B.
3. Implikasi bernilai S karena pendahulu bernilai B dan pengikutnya bernilai S.

   Kontrapositifnya adalah "Jika Medan tidak terletak di Irian Jaya maka Jakarta bukan Ibu Kota RI", dan mempunyai nilai kebenaran S.
4. Implikasi bernilai B karena pendahulunya bernilai S meskipun nilai kebenaran dari pengikutnya belum diketahui.

Kontrapositifnya adalah “jika Rudi tidak lulus ujian maka matahari tidak terbit dari Barat”, dan mempunyai nilai kebenaran B. (Mengapa?).

Dari contoh-contoh ini tampak bahwa nilai kebenaran dari suatu implikasi selalu sama dengan nilai kebenaran dari kontrapositifnya.

Contoh .
Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:
“Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya”
Penyelesaian:
Konvers: Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil
Invers: Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya
Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia tidak mempunyai mobil

Contoh .
Tentukan kontraposisi dari pernyataan:
(a) Jika dia bersalah maka ia dimasukkan ke dalam penjara.
(b) Jika 6 lebih besar dari 0 maka 6 bukan bilangan negatif.
(c) Iwan lulus ujian hanya jika ia belajar.
(d) Hanya jika ia tidak terlambat maka ia akan mendapat pekerjaan itu.
(e) Perlu ada angin agar layang-layang bisa terbang.
(f) Cukup hari hujan agar hari ini dingin.

Penyelesaian:
(a) Jika ia tidak dimasukkan ke dalam penjara, maka ia tidak bersalah.
(b) Jika 6 bilangan negatif, maka 6 tidak lebih besar dari 0.

(c) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Jika Iwan lulus ujian maka ia sudah belajar", sehingga kontraposisinya adalah "Jika Iwan tidak belajar maka ia tidak lulus ujian"

(d) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Jika ia mendapat pekerjaan itu maka ia tidak terlambat", sehingga kontraposisinya adalah "Jika ia terlambat maka ia tidak akan mendapat pekerjaan itu"

(e) Pernyataan yang diberikan dapat ditulis kembali menjadi "Ada angin adalah syarat perlu agar layang-layang bisa terbang" yang dalam hal ini ekivalen dengan "Jika layang-layang bisa terbang maka hari ada angin". Kontraposisinya adalah "Jika hari tidak ada angin, maka layang-layang tidak bisa terbang".

(f) Pernyataan yang diberikan dapat ditulis kembali menjadi "Hari hujan adalah syarat cukup agar hari ini dingin", yang dalam hal ini ekivalen dengan "Jika hari hujan maka hari ini dingin". Kontraposisinya adalah "Jika hari ini tidak dingin maka hari tidak hujan".

Contoh:

Diberikan pernyataan "Perlu memiliki *password* yang sah agar anda bisa *log on* ke *server*"

(a) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi "jika p, maka q".

(b) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tersebut.

Penyelesaian:

Misalkan

p : Anda bisa *log on* ke *server*

q : Memiliki *password* yang sah

maka

(a) Jika anda bisa *log on* ke *server* maka anda memiliki *password* yang sah

(b) 1) Ingkaran:
"Anda bisa *log on* ke *server* dan anda tidak memiliki *password* yang sah"

2) Konvers:
"Jika anda memiliki *password* yang sah maka anda bisa *log on* ke *server*"

3) Invers:
"Jika anda tidak bisa *log on* ke *server* maka anda tidak memiliki *password* yang sah"

4) Kontraposisi :
"Jika anda tidak memiliki *password* yang sah maka anda tidak bisa *log on* ke *server*"

5.2 Ingkaran Implikasi, Konvers, Invers, dan Kontraposisinya.

Contoh.

1. Tentukan ingkaran atau negasi dari implikasi: "Jika suatu bendera adalah bendera RI maka bendera tersebut berwarna merah dan putih."
2. Tentukan juga ingkaran dari konvers, invers, dan kontraposisi implikasi di atas.

Untuk menjawab pertanyaan tadi dan untuk menentukan negasi atau ingkaran konvers, invers, dan kontraposisi maka pengetahuan tentang negasi yang sudah dibahas di bagian depan sangat penting dan menentukan, terutama pengetahuan untuk menentukan negasi atau ingkaran soal nomor 1 s.d. 3 di bawah ini.

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $p \Rightarrow q$
4. $q \Rightarrow p$
5. $\sim p \Rightarrow \sim q$
6. $\sim q \Rightarrow \sim p$

Sebagai pengecek, bandingkan hasil yang Anda dapatkan dengan jawaban di bawah ini.

1. $\sim p \vee \sim q$
2. $\sim p \wedge \sim q$
3. $p \wedge \sim q$
4. $q \wedge \sim p$
5. $\sim p \wedge q$
6. $\sim q \wedge p$

1. Dengan demikian, ingkaran atau negasi dari implikasi “Jika suatu bendera adalah bendera RI maka bendera tersebut berwarna merah dan putih.” adalah:
   Ada atau terdapat bendera RI namun bendera tersebut tidak berwarna merah dan putih
2. Negasi atau ingkaran dari konvers, invers, dan kontraposisi suatu implikasi tadi berturut-turut adalah:
   a. Negasi konvers: Ada bendera berwarna merah dan putih namun bendera tersebut bukan bendera RI.
   b. Negasi invers: Ada bendera yang bukan bendera RI namun bendera tersebut berwarna merah dan putih
   c. Negasi kontraposisi: Ada bendera yang tidak berwarna merah dan putih namun bendera tersebut bendera RI

5.3 Rangkuman

Konvers dari implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $q \Rightarrow p$

Invers dari implikasi p $\Rightarrow$ q adalah ~ p $\Rightarrow$ ~ q

Kontraposisi dari implikasi p $\Rightarrow$ q adalah ~ q $\Rightarrow$ ~ p

5.4 Latihan

1. Buatlah pernyataan ingkaran dari pernyataan majemuk berikut ini:
   a. Segitiga ABC adalah siku-siku dan sama kaki.
   b. Kuda binatang menyusui atau binatang memamah biak.
   c. Jika harga minyak naik maka semua harga barang naik.
   d. Jika x bilangan real dengan $x < 2$ maka $x^2 < 4$.
   e. Jika Amir naik kelas maka ia dibelikan sepeda.
2. Buatlah konvers, invers dan kontraposisi dari tiap implikasi berikut.
   a. Jika n bilangan ganjil maka n^2 bilangan ganjil
   b. Jika $x = 5$ maka $x^2 = 25$
   c. Jika dua segitiga mempunyai besar sudut-sudut yang sama maka sisi sisi yang sesuai sebanding.
   d. Jika $x + 1 = 0$ maka $x^2 = 1$
   e. $x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$
3. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari setiap pernyataan implikasi berikut:
   a. Jika harga BBM naik, maka harga kebutuhan sehari-hari naik
   b. Jika Badu siswa SMA, maka ia lulusan SMP
   c. Jika Carli siswa yang pandai, maka ia lulus tes
   d. Jika harga turun, maka permintaan naik
   e. Jika Ali seorang anggota MPR, maka ia seorang anggota DPR
4. Tuliskan invers, konvers dan kontraposisi dari pernyataan-pernyataan berikut:
   a. Jika S adalah himpunan yang memiliki n elemen maka S memiliki tepat 2n subset.

b. Jika n adalah jumlah kuadrat dua bilangan bulat ganjil maka n bukan bilangan kuadrat murni.
c. Jika n adalah bilangan real maka n2 tidak negatip.
d. Jika N adalah himpunan semua bilangan asli maka N lengkap.

5. Tunjukkan dengan tabel kebenaran bahwa pernyataan majemuk berikut ekuivalen (ekuivalen logis).
   a. $p \Rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$
   b. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   c. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
6. Diberikan pernyataan “Untuk mendapatkan satu kupon undian, Anda cukup membeli dua produk senilai Rp 50.000,-”.
   (a) Nyatakan pernyataan di atas dalam bentuk proposisi “jika *p*, maka *q*”.
   (b) Tentukan ingkaran, konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan tersebut.
7. Tentukan ingkaran dan kontraposisi dari pernyataan berikut: “Dia tidak pergi ke kampus maupun ke perpustakaan bilamana hari ini hujan”.
8. Misalkan diberikan proposisi bersyarat “ jika segitiga ABC sama sisi maka segitiga ABC sama kaki”. Tentukan konvers, invers dan kontraposif dari proposisi bersyarat tersebut.

BAB 6

PENARIKAN KESIMPULAN

Capaian Pembelajaran:

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami dan menjelaskan:

6.1 Premis dan Argumen
6.2 Validitas Pembuktian
6.3 Modus Ponens
6.4 Modus Tolens
6.5 Silogisme

Salah satu penerapan logika matematika adalah pada penarikan kesimpulan atau argumentasi berdasarkan beberapa premis yaitu pernyataan yang diketahui bernilai benar. Dengan menggunakan prinsip-prinsip logika dapat ditemukan kesimpulan dari premis-premis yang diajukan. Penarikan kesimpulan yang bernilai benar dinyatakan berlaku/sah/valid, yaitu jika semua premisnya benar maka kesimpulannya juga benar.

6.1 Premis dan Argumen

Logika berkenaan dengan penalaran yang dinyatakan dengan pernyataan verbal. Suatu diskusi atau pembuktian yang bersifat matematik atau tidak, terdiri atas pernyataan-pernyataan yang saling berelasi. Biasanya kita memulai dengan pernyataan-pernyataan tertentu yang diterima kebenarannya dan kemudian berargumentasi untuk sampai pada konklusi (kesimpulan) yang ingin dibuktikan.

Pernyataan-pernyataan yang digunakan untuk menarik suatu kesimpulan disebut premis, sehingga suatu premis dapat berupa aksioma, hipotesa, definisi atau pernyataan yang sudah dibuktikan sebelumnya.

Sedang yang dimaksud dengan argumen adalah kumpulan kalimat yang terdiri atas satu atau lebih premis yang mengandung bukti-bukti (*evidence*) dan suatu (satu) konklusi. Konklusi ini selayaknya (*supposed to*) diturunkan dari premis-premis.

Jika pernyataan atau proposisi dilambangkan dengan kalimat yang memiliki nilai benar saja atau salah saja, maka istilah sahih atau tidak sahih berkait dengan penarikan kesimpulan, penalaran, ataupun argumen. penalaran adalah aktivitas pikiran yang abstrak sedangkan argumen lambangnya yang berbentuk bahasa atau bentuk-bentuk lambang lainnya.

Dikenal dua macam penarikan kesimpulan. Yang pertama adalah induksi atau penalaran induktif dan yang kedua adalah deduksi atau penalaran deduktif. Yang akan dibicarakan adalah penalaran deduktif atau deduksi.

Contoh deduksi atau penalaran deduktif adalah:

Premis 1 : Semua manusia akan mati.
Premis 2 : Amri manusia.
Kesimpulan : Jadi, Amri pada suatu saat akan mati

6.2 Validitas Pembuktian

Konklusi selayaknya diturunkan dari premis-premis atau premis-premis selayaknya mengimplikasikan konklusi, dalam argumentasi yang valid, konklusi akan bernilai benar jika setiap premis yang digunakan di dalam argumen juga bernilai benar. Jadi validitas argumen tergantung pada bentuk argumen itu dan dengan bantuan tabel kebenaran.

Bentuk kebenaran yang digeluti oleh para matematikawan adalah kebenaran relatif. Benar atau salahnya suatu konklusi hanya dalam hubungan dengan sistem aksiomatik tertentu. Konklusi itu benar jika mengikuti hukum-hukum logika yang valid dari aksioma- aksioma sistem itu, dan negasinya adalah salah.

Untuk menentukan validitas suatu argumen dengan selalu mengerjakan tabel kebenarannya tidaklah praktis. Cara yang lebih praktis banyak bertumpu pada tabel kebenaran dasar dan bentuk kondisional. Bentuk argumen yang paling sederhana dan klasik adalah Modus ponens dan Modus tolens.

6.3 Modus Ponens (*law of detachment)*

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$, yang dalam hal ini, p dan $p \rightarrow q$ adalah hipotesis, sedangkan q adalah konklusi. Modus ponen adalah suatu argumentasi yang bentuknya dapat dinyatakan seperti di bawah ini:

p $\Rightarrow$ q   premis 1
P   premis 2

$\therefore$ q   Konklusi

Cara membacanya : Apabila diketahui jika p maka q benar, dan p benar, disimpulkan q benar. (Notasi : Ada yang menggunakan tanda $\therefore$ untuk menyatakan konklusi, seperti p $\Rightarrow$ q, p $\therefore$ q)

Sah tidaknya suatu argumentasi,dapat dikaji menggunakan tabel kebenaran sebagai berikut.

Tabel 6.1 Nilai Kebenaran Modus Ponen

p	q	p $\Rightarrow$ q	(p $\Rightarrow$ q) $\wedge$ p	[(p $\Rightarrow$ q) $\wedge$ p] $\Rightarrow$ q
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Suatu argumentasi dianggap sah atau valid jika argumen tersebut benar untuk setiap kemungkinan premisnya atau merupakan tautologi untuk semua nilai kebenaran premis-premisnya.

Dari tabel dapat kita lihat bahwa pada kolom 5 bernilai benar untuk setiap nilai kebenaran premisnya.

Contoh:

Premis 1 :Jika Siti naik kelas maka Siti dibelikan sepeda (B)

Premis 2 :Siti naik kelas (B)

∴ Siti dibelikan sepeda (B)

Contoh :

Premis 1 : Jika saya belajar, maka saya lulus ujian (benar)

Premis 2 : Saya belajar (benar)

Konklusi : Saya lulus ujian (benar)

Baris pertama dari tabel kebenaran kondisional (implikasi) menunjukkan validitas dari bentuk argumen modus ponen.

Misalkan implikasi “Jika 20 habis dibagi 2,maka 20 adalah bilangan genap” dan hipotesis “20 habis dibagi 2” keduanya benar. Maka menurut modus ponen, inferensi berikut:

“Jika 20 habis dibagi 2, maka 20 adalah bilangan genap. 20 habis dibagi 2. Karena itu, 20 adalah bilangan genap”

adalah benar. Kita juga dapat menuliskan inferensi di atas sebagai:

Jika 20 habis dibagi 2, maka 20 adalah bilangan genap
20 habis dibagi 2

$\therefore$ 20 adalah bilangan genap

6.4 Modus Tollens

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$. Modus Tollens adalah suatu argumentasi yang bentuknya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$p \Rightarrow q$ premis 1
$\sim q$ premis 2

$\therefore \sim p$ Konklusi

Dengan menggunakan tabel dapat dibuktikan bahwa bentuk $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ merupakan Tautologi.

Tabel 6.2 Nilai Kebenaran Modus Tollens

p	q	~p	~q	(p⇒q)	(p⇒q) ∧ ~q)	[(p⇒q)∧~q] ⇒~p
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	S	B	B	B

Tampak pada kolom terakhir dari di atas bahwa pernyataan majemuk $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ selalu bernilai B. Jadi, pernyataan majemuk itu merupakan suatu tautologi. Tautologi ini disebut *modus tollens*.

Contoh:
Jika Andi lulus ujian maka Andi memperoleh hadiah
Andi tidak memperoleh hadiah

$\therefore$ Andi tidak lulus ujian

Contoh:
Premis 1 :Jika hari hujan maka saya memakai jas hujan (benar)
Premis 2 :Saya tidak memakai jas hujan (benar)

Konklusi : Hari tidak hujan (benar)

Perhatikan bahwa jika p terjadi maka q terjadi, sehingga jika q tidak terjadi maka p tidak terjadi.

Misalkan implikasi “Jika n bilangan ganjil, maka n^2 bernilai ganjil” dan hipotesis “n^2 bernilai genap” keduanya benar. Maka menurut modus tollen, inferensi berikut

Jika n bilangan ganjil, maka n^2 bernilai ganjil
n^2 bernilai genap

$\therefore$ n bukan bilangan ganjil
adalah benar.

6.5 Silogisme Hipotetis

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$. Silogisme juga disebut sifat transitif dari implikasi, adalah suatu argumentasi yang bentuknya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$p \Rightarrow q$ premis 1

$q \Rightarrow r$ premis 2

$\therefore p \Rightarrow r$ konklusi

Tabel 6.3 Nilai Kebenaran Silogisme

p	q	r	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow r$	$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]$	$(p\Rightarrow r)$	$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	S	B	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	S	B	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

Contoh:

Jika Anik rajin belajar maka Anik naik kelas

Jika Anik naik kelas maka Anik memperoleh hadiah

∴ Jika Anik rajin belajar maka Anik memperoleh hadiah

Contoh :

Premis 1: Jika kamu benar, saya bersalah (B)

Premis 2 : Jika saya bersalah, saya minta maaf (B)

Konklusi : Jika kamu benar, saya minta maaf (B)

Contoh :

Misalkan implikasi "Jika saya belajar dengan giat, maka saya lulus ujian" dan implikasi "Jika saya lulus ujian, maka saya cepat menikah" adalah benar. Maka menurut kaidah silogisme, inferensi berikut,

Jika saya belajar dengan giat, maka saya lulus ujian Jika saya lulus ujian, maka saya cepat menikah

---

$\therefore$ Jika saya belajar dengan giat, maka saya cepat menikah

adalah benar

Contoh.

Perhatikan premis-premis ini.

(1) Jika Anita mendapat A pada ujian akhir maka Anita mendapat A untuk mata kuliah itu.
(2) Jika Anita mendapat A untuk mata kuliah itu maka ia dinominasikan menerima beasiswa.
(3) Anita tidak dinominasikan menerima beasiswa. Buatlah suatu kesimpulan dari tiga premis tersebut.

Penyelesaian:

Misal,

p: Anita mendapat nilai A pada ujian akhir

q:Anita mendapat nilai A untuk mata kuliah itu

r: Anita dinominasikan mendapat beasiswa

Peryataan-pernyataan di atas dapat diterjemahkan secara simbolik:

(1) $p \Rightarrow q$
(2) $q \Rightarrow r$
(3) $\sim r$

Dari premis (1) dan (2), dengan silogisme, akan diperoleh $p \Rightarrow r$. Jika dilanjutkan dengan premis (3) akan terjadi modus tolens berikut:

$p \Rightarrow r$

$\sim r$

$\therefore \sim p$

Kesimpulannya, Anita tidak mendapat nilai A pada ujian akhir.

Contoh:

Apakah penarikan kesimpulan berikut ini valid?

Jika x = 3 maka x^2 =

9 $x^2 = 9$

Jadi, x = 3

Penyelesaian:

Bentuk simbolik penarikan kesimpulan di atas adalah:

$p \Rightarrow q$

q

$\therefore p$

Bentuk di atas bukan modus ponens, modus tolens, maupun silogisme. Untuk menentukan valid atau tidaknya, dibuat tabel kebenaran $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ berikut.

Tabel 6.4 Nilai Kebenaran $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$
B	**B**	**B**	**B**	**B**
B	S	S	S	B
S	B	B	B	S
S	S	B	S	B

Nilai kebenaran $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ yang diperlihatkan dalam langkah 4 ternyata bukan tautologi. Dengan demikian bentuk penarikan kesimpulan di atas tidak valid.

6.6 Silogisme Disjungtif

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \vee q) \wedge {\sim}p] \rightarrow q$. Kaidah silogisme disjungtif ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Contoh :

Inferensi berikut:

"Saya belajar dengan giat atau saya menikah tahun depan. Saya tidak belajar dengan giat. Karena itu, saya menikah tahun depan."

menggunakan kaidah silogisme disjungtif, atau dapat ditulis dengan cara:

Saya belajar dengan giat atau saya menikah tahun depan. Saya tidak belajar dengan giat.

$\therefore$ Saya menikah tahun depan.

6.7 Simplifikasi

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge q) \rightarrow p$, yang dalam hal ini, p dan q adalah hipotesis, sedangkan p adalah konklusi. Kaidah simplifikasi ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

Contoh :

Penarikan kesimpulan seperti berikut ini:

"Hamid adalah mahasiswa ITB dan mahasiswa Unpar. Karena itu, Hamid adalah mahasiswa ITB."

menggunakan kaidah simplifikasi, atau dapat juga ditulis cara:

Hamid adalah mahasiswa ITB dan mahasiswa Unpar.

$\therefore$ Hamid adalah mahasiswa ITB.

Simplifikasi berikut juga benar:

"Hamid adalah mahasiswa ITB dan mahasiswa Unpar. Karena itu, Hamid adalah mahasiswa Unpar"

karena urutan proposisi di dalam konjungsi $p \wedge q$ tidak mempunyai pengaruh apa-apa.

6.8 Rangkuman

Pernyataan-pernyataan yang digunakan untuk menarik suatu kesimpulan disebut premis, sehingga suatu premis dapat berupa aksioma, hipotesa, definisi atau pernyataan yang sudah dibuktikan sebelumnya.

Sedang yang dimaksud dengan argumen adalah kumpulan kalimat yang terdiri atas satu atau lebih premis yang mengandung bukti-bukti (*evidence*) dan suatu (satu) konklusi. Konklusi ini selayaknya (*supposed to*) diturunkan dari premis-premis.

1. Modus Ponens (*law of detachment)*

   Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge (p \to q)) \to q$, yang dalam hal ini, p dan $p \to q$ adalah hipotesis, sedangkan q adalah konklusi.
2. Modus Tollens

   Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[\sim q \wedge (p \to q)] \to \sim p$.

3. Silogisme Hipotetis

   Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$. Silogisme juga disebut sifat transitif dari implikasi
4. Silogisme Disjungtif

   Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$

6.9 Latihan

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

Untuk soal nomor 1 sampai 10, buatlah suatu kesimpulan dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. (1) Suatu fungsi disebut fungsi bijektif jika fungsi itu fungsi injektif (satu-satu) dan fungsi onto.

   (2) Fungsi f bukan fungsi bijektif.
2. (1) Jika petani merabuk dua kali sebulan maka ia akan panen raya.

   (2) Jika rabuk harganya mahal maka petani akan menangis.

   (3) Jika orang tidak merabuk dua kali sebulan maka petani tidak menangis.
3. (1) Lingkaran dapat digambar melalui 3 titik jika ke-3 titik tidak segaris.

   (2) Suatu lingkaran tidak dapat digambar.
4. (1) Nilai sinus α akan positif jika α di kuadran I atau II.

   (2) α di kuadran II.
5. (1) Jika $A \subset B$ maka $A \cap B = A$.

   (2) $A \cap B \neq A$.

Untuk soal nomor 6 sampai 10, tentukan apakah penarikan kesimpulan di bawah ini valid ? Berikan penjelasannya.

6. Jika besar sudut α negatif maka cosinus α positif. Sudut A = 60^0

   Jadi, cosinus A negatif
7. Jika n bilangan ganjil maka n^2 bilangan ganjil.

Jika n^2 bilangan ganjil maka $n^2 + 1$ bilangan genap. $n^2 + 1$ bilangan ganjil.
Jadi, n bilangan genap.

8. Jika hujan lebat turun maka akan terjadi banjir. Sekarang tidak banjir.
   Jadi, hujan tidak lebat.
9. Wanita cantik adalah artis film. Wanita yang pintar tidak cantik. Jadi, artis film tidak pintar.
10. Jika ia tidak sakit maka ia masuk sekolah. Jika ia tidak lelah maka ia masuk sekolah. Ia tidak sakit dan tidak lelah.
    Jadi, ia masuk sekolah.
11. Tentukan penarikan kesimpulan yang sahih di bawah ini:
    a. $(p \vee q)$, $\sim p$. Jadi: q
    b. $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$, $r \Rightarrow s$. Jadi $p \Rightarrow s$
    c. $p \Rightarrow q$, $\sim p$. Jadi $\sim q$
    d. p, q. Jadi: $p \wedge q$
    e. p. Jadi $p \vee q$
    f. $p \vee q \vee r$, $p \Rightarrow s$, $q \Rightarrow s$, $r \Rightarrow s$. Jadi: s
    g. $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow s$, $\sim q \vee \sim s$. Jadi $\sim p \vee \sim q$
    h. $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow s$, $p \vee r$. Jadi $q \vee s$
12. Argumen-argumen berikut ini absah atau tidak. Jika argumen absah, tunjukkan jenis argumen manakah yang digunakan! Tunjukkanlah, jika tidak absah!
    a. Jika sepedaku rusak maka saya diantar ke sekolah oleh ibu. Ternyata sepedaku tidak rusak.
       Jadi, saya tidak diantar ke sekolah oleh ibu.
    b. Jika saya tidak pergi ke sekolah maka saya membantu orang tua. Saya tidak membantu orang tua.
       Jadi, saya pergi ke sekolah
    c. Jika hari ini turun hujan maka petani tidak panen tembakau. Ternyata hari ini turun hujan.

Jadi, petani tidak panen tembakau.

d. Dina pergi ke sekolah atau Dina pergi ke pasar. Ternyata Dina tidak pergi ke pasar.
   Jadi, Dina pergi ke sekolah.

e. Jika Edi sakit maka Edi tidak bekerja.
   Jika Edi tidak bekerja maka Edi tidak memperoleh gaji. Jadi, jika Edi sakit maka Edi tidak memperoleh gaji.

13. Buatlah suatu kesimpulan dari premis-premis yang ditentukan ini sehingga diperoleh suatu argumen yang absah! Jenis argumen manakah yang Anda gunakan?
    a. Jika Rina sakit maka Rina menangis. Rina tidak menangis.
    b. Jika Adi tidak merokok maka Adi tidak sakit paru-paru
       Jika Adi tidak minum minuman keras maka Adi tidak merokok.
    c. Mardi pergi ke Jakarta atau Mardi pergi ke Denpasar. Mardi tidak pergi ke Denpasar.
    d. Jika Bu Tutik tidak mengajar maka Bu Tutik pergi kuliah. Ternyata Bu Tutik tidak mengajar.
    e. Jika Milda tidak sakit perut maka Milda tidak pergi ke rumah sakit. Ternyata Milda pergi ke rumah sakit.

14. Dengan menggunakan tabel selidiki keabsahan argumentasi berikut:
    a. $p \Rightarrow q$ premis

       $\sim q$ premis

       $\therefore\ \sim p$ Konklusi

    b. $p \Rightarrow q$ premis

       $q \Rightarrow r$ premis

$\therefore p \Rightarrow q$ konklusi

c. $p \vee q$ premis

p premis

$\therefore \sim q$ konklusi

15. Mana yang merupakan modus Ponens, Tollens atau Silogisma :
    a. Premis 1: Jika Ibu pergi maka adik menangis
       Premis 2: Adik tidak menangis
       ____
       Konklusi: Ibu tidak pergi
    b. Premis 1: Jika log 10 = 1 maka $^{2}\log 8 = 3$
       Premis 2: log 10 = 1
       ____
       Konklusi: $^{2}\log 8 = 3$
    c. Premis 1: Jika Aldi seorang programer IT maka Aldi memahami flowchart
       Premis 2: Jika Aldi memahami flowchart maka Aldi mampu mengoperasikan komputer
       ____
       Konklusi: Jika Aldi seorang programer IT maka Aldi mampu mengoperasikan komputer
16. Periksalah sah atau tidaknya argumentasi berikut, kemudian sebutkan prinsip kesimpulan yang digunakan !
    a. P1 : Jika Ardi rajin belajar maka Ardi naik kelas.
       P2 : Ardi rajin belajar
       ____
       Kesimpulan: Ardi naik kelas

    b. P1 : Setiap hari Minggu pengunjung toko banyak sekali. P2 : Pengunjung toko sepi.
       ____
       Kesimpulan: Hari ini bukan hari Minggu.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2010. *Elementary Linear Algebra*. Aplications Version.Tenth Edition. UK: Jhon Wiley & Son.

Dumairy. 2004. Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi. Cetakan ke 12. Yogyakarta:BPFE.

Hidayat, Ainur Rahman. 2018. *Filsafat Berpikir, Teknik-Teknik Berpikir Logis Kontra Kesesatan Berpikir*. Pamekasan: Duta Media Publishing

Huwaida, Hikmayanti. 2017. *Matematika*. Banjarmasin: Penerbit PT Grafika Wangi Kalimantan.

Huwaida, Hikmayanti. 2019. *Matematika Bisnis*. Banjarmasin: Penerbit Poliban Press.

Nababan, M. 2005. *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

R, Wahyu Hidayat dan Jihadi, M. 2016. *Matematika Ekonomi*. Malang: Penerbit Universitas Muhamadiyah Malang.

Rahmi dan Suryani, Mulia. 2016. Buku Ajar *Logika Matematika*. Yogyakarta: Deepublish.

Riwayati, Hedwigis Esti dan Markonah. 2008. *Matematika Ek. dan Bisnis 1*. Jakarta: Penerbit PT Grasindo.

Wijayanti, Indah Emilia., Wahyuni,Sri., dan Susanti,Yeni. 2018. *Dasar-Dasar Aljabar Linear dan Penggunaannya dalam Berbagai Bidang*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

GLOSARIUM

Biimplikasi	suatu pernyataan majemuk yang berbentuk ”p jika dan hanya jika q” yang berarti “jika p maka q dan jika q maka p”.
Disjungsi	adalah gabungan dua pernyataan yang menggunakan kata penghubung logika “atau” sehingga membentuk dua pernyataan majemuk.
Implikasi	Gabungan dua pernyataan p dan q sehingga membentuk pernyataan majemuk dengan menggunakan kata penghubung “Jika..., maka...”
Kalimat terbuka	adalah kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya karena masih mengandung variabel atau peubah
Konjungsi	adalah Gabungan dua pernyataan tunggal yang menggunakan kata penghubung “dan” sehingga terbentuk pernyataan majemuk
Kontingensi	adalah suatu pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya memuat benar dan salah
Kontradiksi	adalah Suatu pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya selalu salah
Negasi	dari suatu pernyataan majemuk dapat dibentuk dari negasi pernyataan-pernyataan tunggal dengan menggunakan ekuivalensi, yaitu apabila negasi pernyataan-pernyataan majemuk itu mempunyai nilai kebenaran yang

	sama dengan pernyataan majemuk negasi dari komponen-komponennya.
Pernyataan	adalah kalimat yang hanya benar atau salah saja, tetapi tidak sekaligus kedua-duanya.
Tautologi	adalah Suatu pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya adalah selalu benar

.

INDEKS

BIOGRAFI PENULIS

Hikmayanti Huwaida dilahirkan di Banjarmasin tanggal 24 Agustus 1970, anak kedua dari lima bersaudara pasangan Bapak H. Husni Thamrin (alm) dan Ibu Hj. Lismiaty. Menikah 14 Nopember 1999 dengan Noor Ifansyah (alm) putera pasangan H. Abdullah Hasan (alm) dengan Hj. Salmah (alm). Dengan satu anak bernama Muhammad Taufiqurrahman.

Riwayat pendidikan dimulai di SD Negeri Mulawarman lulus tahun 1983, SMP Negeri 2 lulus tahun 1986, SMA Negeri 1 lulus tahun 1989, kuliah di Jurusan Matematika Fakulltas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro lulus tahun 1996, dan selanjutnya lulus di Program Magister Manajemen Pendidikan Program Pasca Sarjana Universitas Lambung Mangkurat tahun 2011. Saat ini penulis bekerja sebagai dosen di Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin. Mata kuliah yang diampu terdiri dari Statistika Bisnis, Matematika Keuangan, Statistika Deskriptif, Kalkulus I, Statistika Probabilitas, Kalkulus II, Aljabar Linier, Teknik Riset Operasional, Matematika I dan Matematika II. Buku ajar yang ditebitkan tahun 2017 berjudul Matematika. Di tahun 2019 berjudul Statistika Deskriptif dan Matematika Bisnis. Di tahun 2020 berjudul Program Linier.

LOGIKA MATEMATIKA

Kita menyadari bahwa betapa pentingnya berpikir kritis dalam melakukan pemecahan masalah, baik itu masalah matematik, maupun masalah yang berhubungan langsung dengan kehidupan sehari-hari. Dengan berpikir kritis, seseorang dapat mengatur, menyesuaikan, mengubah, atau memperbaiki pikirannya, sehingga ia dapat mengambil keputusan untuk bertindak lebih tepat. Untuk dapat berpikir kritis, seseorang harus juga memiliki kemampuan penalaran. Sedangkan jalan kunci untuk melakukan penalaran adalah dengan memahami logika. Jadi, secara tidak langsung, untuk dapat melakukan pemecahan masalah, syarat yang tak boleh ditinggalkan adalah memahami logika.

Capaian Pembelajaran:

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami dan menjelaskan:

1.1 Sejarah Logika

1.2 Pengertian Logika

1.3 Kegunaan Logika

1.4 Aliran Logika

1.5 Logika Matematika

HIKMAYANTI HUWAIDA

ISBN 978-623-7694-71-7

9 786237 694717

ISBN 978-623-7694-72-4 (PDF)

9 786237 694724

Penerbit Poliban Press
Redaksi :
Politeknik Negeri Banjarmasin, Jl. Brigjen H. Hasan Basry, Pangeran, Komp. Kampus ULM, Banjarmasin Utara
Telp : (0511)3305052
Email : press@poliban.ac.id