HIKMAYANTI HUWAIDA

PROGRAM LINIER

Diterbitkan Atas Kerjasama
Deepublish dengan Politeknik Banjarmasin

PROGRAM LINIER

PROGRAM LINIER

Hikmayanti Huwaida

PROGRAM LINIER

Penulis :
Hikmayanti Huwaida

ISBN :
978-623-7694-11-3

ISBN Elektronis :
978-623-7694-39-7

Editor dan Penyunting :
Faris Ade Irawan

Desain Sampul dan Tata letak :
Rahma Indera; Eko Sabar Prihatin

Penerbit :
POLIBAN PRESS
Anggota APPTI (Asosiasi Penerbit Perguruan Tinggi Indonesia) no.004.098.1.06.2019
Cetakan Pertama, 2020

Redaksi :
Politeknik Negeri Banjarmasin, Jl. Brigjen H. Hasan Basry,
Pangeran, Komp. Kampus ULM, Banjarmasin Utara
Telp : (0511)3305052
Email : press@poliban.ac.id

Diterbitkan pertama kali oleh :
Poliban Press, Banjarmasin, Oktober 2020

Dicetak oleh :
PERCETAKAN DEEPUBLISH
Jl.Rajawali, G. Elang 6, No 3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman
Jl.Kaliurang Km.9,3 – Yogyakarta 55581
Telp/Faks: (0274) 4533427
Website: www.deepublish.co.id
www.penerbitdeepublish.com
E-mail: cs@deepublish.co.id

Katalog Dalam Terbitan (KDT)
Hikmayanti Huwaida—Cet. **1**. — **Program Linier** : Poliban Press, 2020.

xi; **85** hlm.; **15.5 x 23** cm

UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada Poliban Press karena telah mempercayakan proses percetakan buku *Program Linier* kepada Penerbit Deepublish. Semoga buku ini dapat memberikan manfaat kepada seluruh pembaca dan kerja sama ini dapat terus terjalin.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah Swt. atas limpahan rahmat dan karunianya sehingga buku *Program Linier* tahun 2020 telah dapat diselesaikan. Buku ini merupakan pengantar bagi Mahasiswa Diploma di Politeknik Negeri Banjarmasin.

Terimakasih disampaikan kepada Joni Riadi S.S.T., M.T. selaku Direktur Politeknik Negeri Banjarmasin dan Nurmahaludin, S.T., M.T. selaku Ketua Pusat Penelitian dan Pengabdian Masyarakat beserta sekretaris dan staf. Terima kasih juga disampaikan kepada Faris Ade Irawan, Reza Fauzan, Eko Sabar Prihatin dan Rahma Indera yang telah berkontribusi dalam editing serta seluruh tim Poliban Press dan semua pihak yang telah ikut membantu dalam penyelesaian buku ini.

Kami menyadari masih terdapat kekurangan dalam buku ini untuk itu kritik dan saran terhadap penyempurnaan buku ini sangat diharapkan. Semoga buku ini dapat memberi maanfaat bagi semua pihak.

Banjarmasin, September 2020

Poliban Press

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Swt., yang telah melimpahkan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar *Program Linier*.

Buku ajar *Program Linier* dimaksudkan sebagai bahan untuk dijadikan sebagai acuan umum untuk mata kuliah Matematika II bagi Mahasiswa Program Studi Manajemen Informatika Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin.

Dengan selesainya buku ajar ini, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Joni Riadi, S.T., M.T., selaku Direktur Politeknik Negeri Banjarmasin.
2. Padli S.Sos., M.M., selaku Ketua Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin.
3. Rekan-rekan Staf Pengajar Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin.

Akhirnya penulis berharap semoga buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa pada khususnya dan bagi pembaca pada umumnya, amin.

Banjarmasin, September 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB I
SISTEM PERSAMAAN LINIER

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu:

1.1 Memahami Pengertian Persamaan Linear.
1.2 Sistem Persamaan Linier Dua Variabel, Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel.
1.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Menggunakan Metode Eliminasi.
1.4 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Menggunakan Metode Substitusi.
1.5 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Menggunakan Kaidah Cramer.
1.6 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Menggunakan Operasi Baris Elementer.

1.1 Pengertian Persamaan Linear

Dalam bagian ini kita akan mengetahui istilah dasar dan kita bahas sebuah metode untuk memecahkan sistem-sistem persamaan linear.

Sebuah garis dalam bidang *xy* secara aljabar dapat dinyatakan oleh persamaan berbentuk

$$a_1x + a_2y = b.$$

Persamaan semacam ini kita namakan persamaan linear dalam peubah (variabel) x dan peubah y. Secara lebih umum kita mendefinisikan *persamaan linear* dalam n peubah $x_1, x_2, ..., xn$ sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a1x1 + a2x2 + ... + an\,xn = b.$$

di mana $a_1, a_2, ..., an$ dan b adalah konstanta-konstanta riil.

Contoh:

Persamaan – persamaan linear:

$$x + 4y = 10$$
$$y = \frac{1}{2}x + 2z + 5$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

Perhatikan bahwa persamaan linier tidak melibatkan suatu hasil kali atau akar peubah. Semua peubah hanya terdapat sampai angka pertama dan tidak muncul sebagai argumen untuk fungsi trigonometrik, fungsi logaritmik, atau untuk fungsi eksponensial. Berikut ini contoh yang *bukan persamaan linear.*

$$x + 4y^2 = 10$$
$$y = \frac{1}{2}\sin x + 2z + 5$$
$$\sqrt{x_1} - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 + x_1x_2 = 1$$

Pemecahan persamaan linear *a1x1 + a2x2 + ... + an xn = b* adalah urutan dari *n* bilangan *s1,s2, ..., sn* sehingga persamaan tersebut dipenuhi bila kita menyubstitusikannya terhadap *x1 = s1, x2 = s2, ..., xn = sn.* Himpunan semua pemecahan persamaan tersebut dinamakan *himpunan pemecahannya.*

Contoh:

Carilah himpunan pemecahan masing-masing persamaan berikut:

1. 4x – 2y = 1
2. $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$

Untuk mencari pemecahan (1), maka kita dapat menetapkan sebarang nilai untuk *x* dan memecahkan persamaan tersebut untuk mencari *y,* atau kita dapat memilih sebarang nilai untuk *y* dan memecahkan persamaan tersebut untuk mencari *x.* Jika kita ikuti pendekatan pertama dan menetapkan nilai *t* untuk *x,* maka kita dapatkan

x = t, y = 2t – 1/2

Rumus-rumus ini menggambarkan himpunan pemecahan tersebut dalam sebarang parameter t. Pemecahan numerik khusus dapat diperoleh dengan menyubstitusikan nilai spesifik untuk t. Misalnya, $t = 3$ menghasilkan pemecahan $x=3$, $y=11/2$ dan $t = -1/2$ menghasilkan pemecahan $x=-1/2, y=-3/2$.

Jika kita ikuti pendekatan kedua dan menetapkan nilai sebarang t tersebut untuk y, maka kita dapatkan

$$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}, y = t$$

Walaupun rumus-rumus ini berbeda dari rumus-rumus yang kita peroleh di atas, namun rumus-rumus ini menghasilkan himpunan pemecahan yang sama jika t berubah pada semua bilangan riil yang mungkin.

Untuk mencari himpunan pemecahan persamaan (2) kita dapat menetapkan sebarang nilai untuk setiap dua peubah dan memecahkan persamaan tersebut untuk mencari peubah ketiga. Khususnya jika kita menetapkan nilai sebarang s dan t berturut-turut untuk nilai x_2 dan x_3 dan memecahkan persamaan tersebut untuk mencari x_1, maka kita peroleh

$$x_1 = 5 + 4s - 7t, \quad x2 = s, \qquad x_3 = t$$

Sebuah himpunan berhingga dari persamaan – persamaan linear dalam peubah $x_1, x_2, \ldots, xn$ dinamakan *sistem persamaan linear*. Sebuah urutan bilangan–bilangan $s_1, s_2, \ldots, sn$ dinamakan *pemecahan* dari sistem tersebut jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, xn = sn$ adalah pemecahan masing-masing persamaan tersebut. Misalnya sistem

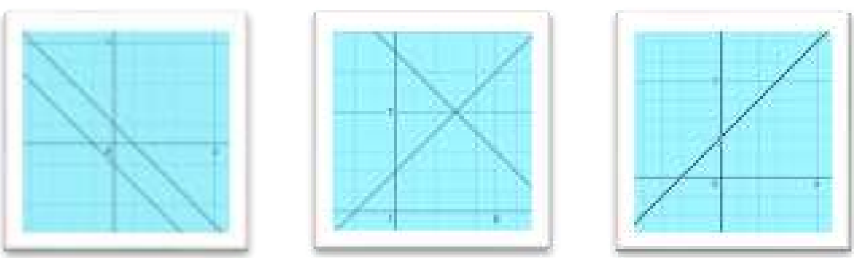
$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

Mempunyai pemecahan $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ karena nilai – nilai ini memenuhi kedua persamaan tersebut. Akan tetapi $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$ bukanlah sebuah pemecahan karena nilai – nilai ini hanya memenuhi persamaan pertama dari kedua persamaan dalam sistem tersebut.

Sebuah sistem persamaan yang tidak mempunyai pemecahan dikatakan tak konsisten (*inconsistent*). Jika ada setidak-tidaknya satu pemecahan, maka sistem persamaan tersebut dinamakan konsisten (*consistent*). Untuk melukiskan kemungkinan-kemungkinan yang dapat terjadi dalam memecahkan sistem persamaan linear, tinjaulah sistem umum dari dua persamaan linear dalam bilangan–bilangan yang tak diketahui *x* dan *y*:

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (a_1,\ b_1 \text{ kedua-duanya tidak nol})$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (a_2,\ b_1 \text{ kedua-duanya tidak nol})$$

Grafik persamaan – persamaan ini merupakan garis-garis, kita beri nama garis–garis tersebut l_1 dan l_2 . Karena titik (*x,y*) terletak pada sebuah garis jika dan hanya jika bilangan–bilangan *x* dan *y* memenuhi persamaan garis tersebut, maka pemecahan sistem persamaan tersebut akan bersesuaian dengan titik perpotongan dari garis l_1 dan l_2. Ada tiga kemungkinan (gambar 1.1).



(1) (2) (3)

Gambar 1.1 Pemecahan Sistem Persamaan Linier

1. Garis l_1 mungkin sejajar dengan garis l_2, dalam kasus tidak ada perpotongannya, dan sebagai konsekuensinya maka tidak ada pemecahan untuk sistem tersebut.
2. Garis l_1 mungkin berpotongan dengan garis l_2 di hanya satu titik, dalam kasus ini maka sistem tersebut hanya mempunyai satu pemecahan.
3. Garis l_1 mungkin berimpit dengan garis l_2, dalam kasus ini tak terhingga banyaknya titik perpotongan, maka sebagai konsekuensinya maka tak terhingga banyaknya pemecahan untuk sistem tersebut.

Sebuah sistem sebarang yang terdiri dari *m* persamaan linear dengan *n* bilangan tak diketahui akan ditulis sebagai:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

di mana $x_1, x_2, \ldots, xn$ adalah bilangan–bilangan tak diketahui sedangkan *a* dan *b* menyatakan konstanta–konstanta.

Misalnya, sebuah sistem umum yang terdiri dari tiga persamaan dengan empat bilangan yang tidak diketahui akan kita tulis sebagai

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\
.&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3
\end{aligned}
$$

1.2 Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dan Tiga Variabel.

- **Sistem Persamaan Linear Dua Variabel**

  Sistem persamaan linear dua variabel adalah sistem persamaan linear yang terdiri dari dua persamaan di mana masing-masing persamaan memiliki dua variabel.

  Contoh:

$$
\begin{aligned}
ax_{1+}bx_2 &= c \\
px_{1+}qx_2 &= r
\end{aligned}
$$

  di mana a, b, p, dan r adalah bilangan-bilangan real.

- **Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel**

  Sistem persamaan linear tiga variabel adalah sistem persamaan yang terdiri dari tiga persamaan di mana masing-masing persamaan memiliki tiga variabel. Contoh SPLTV dengan variabel x, y dan z:

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = d_1$$

$$a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 = d_2$$

$$a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 = d_3$$

di mana a, b, c, dan d adalah bilangan-bilangan real.

1.3 Metode Grafik

Pada metode grafik ini, langkah-langkah yang dilakukan pertama adalah menentukan grafik garis dari masing-masing persamaan kemudian menentukan titik potong dari kedua garis. Titik potong dari kedua garis tersebut adalah penyelesaian dari SPLDV.

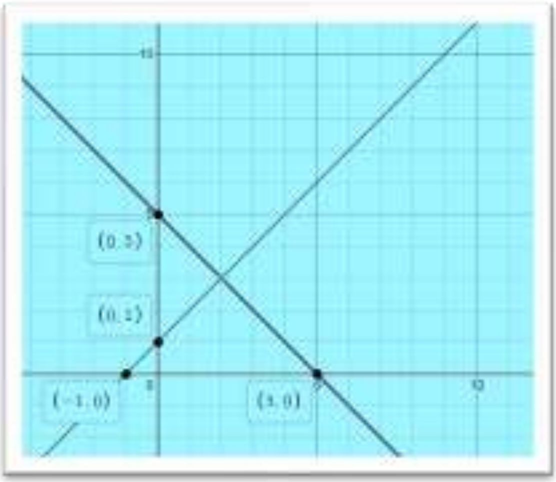
Contoh:

Tentukah penyelesaian dari SPLDV berikut:

$$-x_{1+}x_2 = 1$$
$$x_{1+}x_2 = 5$$

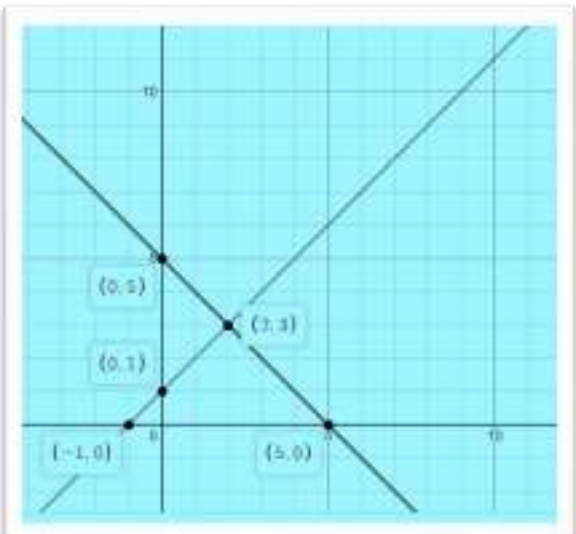
Penyelesaian:

Langkah pertama tentukan garis dari masing-masing persamaan.



Gambar 1.2 Garis Persamaan $-x_{1+}x_2 = 1$ Dan $x_{1+}x_2 = 5$

Setelah diperoleh grafik dari kedua persamaan, sekarang menentukan titik potong dari kedua garis dan menentukan koordinat dari titik potong tersebut.



Gambar 1.3 Titik Potong Persamaan $-x_{1+}x_2 = 1$ Dan $x_{1+}x_2 = 5$

Dari grafik sistem persamaan linear di atas diperoleh titik potong dengan koordinat (2,3), sehingga penyelesaian dari SPLDV adalah (2,3).

Untuk membuktikan penyelesaian tersebut kita substitusikan ke persamaan dengan $x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$.

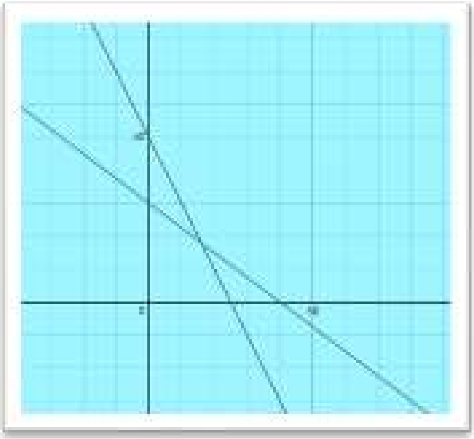
$$-2 + 3 = 1$$
$$2 + 3 = 5$$

Contoh:

Tentukah penyelesaian dari SPLDV berikut:

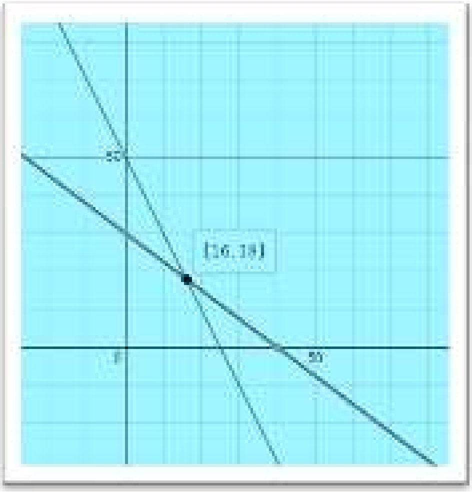
$$4x + 2y = 100$$
$$3x + 4y = 120$$

Penyelesaian:
Langkah pertama tentukan garis dari masing-masing persamaan.



Gambar 1.4 Garis Persamaan $4x + 2y = 100$ dan $3x + 4y = 120$

Setelah diperoleh grafik dari kedua persamaan, sekarang menentukan titik potong dari kedua garis dan menentukan koordinat dari titik potong tersebut.



Gambar 1.5 Titik Potong Persamaan $4x + 2y = 100$ dan $3x + 4y = 120$

Dari grafik sistem persamaan linear di atas diperoleh titik potong dengan koordinat (16,18), sehingga penyelesaian dari SPLDV adalah (16,18).

Untuk membuktikan penyelesaian tersebut kita substitusikan ke persamaan dengan $x_1 = 16$ dan $x_2 = 18$.

1.4 Metode Eliminasi.

Langkah penyelesaian pada metode eliminasi yaitu:

1. Eliminasi salah satu variabel sehingga diperoleh SPLDV
2. Selesaikan SPLDV yang diperoleh dengan langkah seperti pada penyelesaian SPLDV yang telah dibahas
3. Substitusikan variabel yang telah diperoleh pada persamaan yang ada.

Pada metode eliminasi ini, menentukan penyelesaian dari variabel x_1 dengan cara mengeliminasi variabel x_2, dan untuk menentukan penyelesaian variabel x_2 dengan cara mengeliminasi variabel x_1.

Contoh:

Tentukah penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel berikut:

$$-x_1 + x_2 = 1 \text{ .... (i)}$$
$$x_1 + x_2 = 5 \text{ .... (ii)}$$

Penyelesaian:

Pertama menentukan penyelesaian dari variabel x_1

Mengeliminasi variabel x_2 dapat dilakukan dengan mengurangi persamaan I dengan persamaan II.

$$\begin{array}{rl} -x_1 + x_2 = 1 & \\ x_1 + x_2 = 5 & \\ \hline -2x_1 = -4 & - \\ x_1 = 2 & \end{array}$$

Diperoleh penyelesaian $x_1 = 2$.

Kedua menentukan penyelesaian dari variabel x_1. Mengeliminasi variabel x_1 dapat dilakukan dengan menjumlahkan persamaan I dengan persamaan II.

$$\begin{array}{r} -x_{1+}x_2 = 1 \\ x_{1+}x_2 = 5 \\ \hline 2x_2 = 6 \\ x_2 = 3 \end{array} +$$

Diperoleh penyelesaian $x_2 = 3$.
Sehingga himpunan penyelesaian tersebut adalah (2,3).

1.5 Metode Substitusi.

- **Metode Substitusi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel**

Pada metode substitusi, langkah pertama yang dilakukan adalah mengubah salah satu persamaan menjadi persamaan fungsi, yaitu x_1 sebagai fungsi dari x_2 atau x_2 sebagai fungsi dari x_1. Kemudian substitusikan x_1 atau x_2 pada persamaan yang lain.

Contoh:
Tentukan penyelesaian dari SPLDV berikut:

$-x_{1+}x_2 = 1$... (i)
$x_{1+}x_2 = 5.$ .... (ii)

Penyelesaian:
Ubah persamaan (i) menjadi bentuk fungsi

$$-x_{1+}x_2 = 1$$
$$x_2 = 1 + x_1$$

Kemudian persamaan fungsi x_2 disubstitusikan pada persamaan (ii), menjadi

$$x_{1+}x_2 = 5$$
$$x_1 + 1 + x_1 = 5$$
$$2x_1 = 4$$
$$x_1 = 2$$

Diperoleh $x_1 = 2$.
Hasil variabel $x_1 = 2$ disubstitusikan pada salah satu persamaan awal,

$$x_{1+}x_2 = 5$$
$$2 + x_2 = 5$$
$$x_2 = 3$$

Sehingga himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel nya adalah (2,3).

- **Metode Substitusi Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel**

Menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear 3 variabel dengan menggunakan metode substitusi. Langkah-langkah untuk menyelesaikan SPLTV dengan metode substitusi adalah:

1. Pilihlah salah satu persamaan yang paling sederhana, kemudian nyatakan x sebagai fungsi y dan z, atau y sebagai fungsi x dan z, atau z sebagai fungsi x dan y.
2. Substitusikan x atau y atau z yang diperoleh pada langkah 1 ke dalam dua persamaan yang lainnya sehingga didapat sistem persamaan linear dua variabel.
3. Selesaikan sistem persamaan linear dua variabel yang diperoleh pada langkah 2.

Contoh:
Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut:

$$x - 2y + z = 6$$
$$3x + y - 2z = 4$$
$$7x - 6y - z = 10.$$

Penyelesaian:
Langkah pertama, nyatakan persamaan (I) menjadi fungsi dari x, yaitu:

$$x - 2y + z = 6$$
$$\Rightarrow x = 6 + 2y - z$$

Kemudian substitusikan pada persamaan (ii) dan (iii), menjadi
Persamaan (II):

$$3x + y - 2z = 4$$
$$3(6 + 2y - z) + y - 2z = 4$$
$$7y - 5z = -14 \text{ .... (iv)}$$
$$7x - 6y - z = 10$$
$$7(6 + 2y - z) - 6y - z = 10$$
$$8y - 8z = -32$$
$$y - z = -4 \text{..(v)}$$

Persamaan (iv) dan (v) membentuk SPLDV. Dari persamaan (v),

$$y - z = -4$$
$$y = z - 4$$

kemudian disubstitusikan pada persamaan (iv), menjadi:

$$7y - 5z = -14.$$
$$7(z - 4) - 5z = -14.$$
$$7z - 28 - 5z = -14.$$
$$2z = 14.$$
$$z = 7$$

Kemudian substitusikan pada

$$y = z - 4$$
$$y = 7 - 4$$
$$y = 3$$

Substitusikan z=7 dan y=3 pada persamaan

$$x = 6 + 2y - z$$
$$x = 6 + 2(3) - 7$$
$$x = 5$$

Sehingga himpunan penyelesaian adalah {5,3,7}.

Contoh:
Carilah himpunan penyelesaian SPLTV berikut ini dengan metode substitusi.

$$x - 2y + z = 6$$
$$3x + y - 2z = 4$$
$$7x - 6y - z = 10$$

Penyelesaian:

Pertama, kita tentukan dulu persamaan yang paling sederhana. Dari ketiga persamaan yang ada, persamaan pertama lebih sederhana. Dari persamaan pertama, nyatakan variabel x sebagai fungsi y dan z sebagai berikut.

$$\Rightarrow x - 2y + z = 6$$
$$\Rightarrow x = 2y - z + 6$$

Substitusikan variabel atau peubah x ke dalam persamaan kedua

$\Rightarrow 3x + y - 2z = 4$
$\Rightarrow 3(2y - z + 6) + y - 2z = 4$
$\Rightarrow 6y - 3z + 18 + y - 2z = 4$
$\Rightarrow 7y - 5z + 18 = 4$
$\Rightarrow 7y - 5z = 4 - 18$
$\Rightarrow 7y - 5z = -14$ .... Pers. (1)

Substitusikan variabel x ke dalam persamaan ketiga

$\Rightarrow 7x - 6y - z = 10$
$\Rightarrow 7(2y - z + 6) - 6y - z = 10$
$\Rightarrow 14y - 7z + 42 - 6y - z = 10$
$\Rightarrow 8y - 8z + 42 = 10$
$\Rightarrow 8y - 8z = 10 - 42$
$\Rightarrow 8y - 8z = -32$
$\Rightarrow y - z = -4$ .... Pers. (2)

Persamaan (1) dan (2) membentuk sistem persamaan linear 3 variabel y dan z:

$$7y - 5z = -14$$
$$y - z = -4$$

Selanjutnya diselesaikan dengan metode substitusi. Pilih salah satu persamaan yang paling sederhana yaitu persamaan kedua. Dari persamaan kedua, kita peroleh

$$\Rightarrow y - z = -4$$
$$\Rightarrow y = z - 4$$

Substitusikan peubah y ke dalam persamaan pertama

$$\Rightarrow 7y - 5z = -14$$
$$\Rightarrow 7(z - 4) - 5z = -14$$
$$\Rightarrow 7z - 28 - 5z = -14$$
$$\Rightarrow 2z = -14 + 28$$
$$\Rightarrow 2z = 14$$
$$\Rightarrow z = 14/2$$
$$\Rightarrow z = 7$$

Substitusikan nilai z = 7 ke salah satu SPLDV, misal y – z = –4 sehingga kita peroleh

$$\Rightarrow y - z = -4$$
$$\Rightarrow y - 7 = -4$$
$$\Rightarrow y = -4 + 7$$
$$\Rightarrow y = 3$$

Selanjutnya, substitusikan nilai y = 3 dan z = 7 ke salah satu sistem persamaan linear 3 variabel, misal x – 2y + z = 6 sehingga kita peroleh

$$\Rightarrow x - 2y + z = 6$$
$$\Rightarrow x - 2(3) + 7 = 6$$
$$\Rightarrow x - 6 + 7 = 6$$
$$\Rightarrow x + 1 = 6$$
$$\Rightarrow x = 6 - 1$$

Dengan demikian, kita peroleh nilai x = 5, y = 3 dan z = 7. Sehingga himpunan penyelesaian dari SPLTV di atas adalah {(5, 3, 7)}.

Untuk memastikan bahwa nilai x, y, dan z yang diperoleh sudah benar, kalian dapat mengeceknya dengan cara menyubstitusikan nilai x, y, dan z ke dalam tiga persamaan di atas.

Persamaan pertama

$$\Rightarrow\ x - 2y + z = 6$$
$$\Rightarrow\ 5 - 2(3) + 7 = 6$$
$$\Rightarrow\ 5 - 6 + 7 = 6$$
$$\Rightarrow\ 6 = 6\ (benar)$$

Persamaan kedua

$$\Rightarrow\ 3x + y - 2z = 4$$
$$\Rightarrow\ 3(5) + 3 - 2(7) = 4$$
$$\Rightarrow\ 15 + 3 - 14 = 4$$
$$\Rightarrow\ 4 = 4\ (benar)$$

Persamaan ketiga

$$\Rightarrow\ 7x - 6y - z = 10$$
$$\Rightarrow\ 7(5) - 6(3) - 7 = 10$$
$$\Rightarrow\ 35 - 18 - 7 = 10$$
$$\Rightarrow\ 10 = 10\ (benar)$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka bisa dipastikan bahwa nilai x, y dan z yang diperoleh sudah benar dan memenuhi sistem persamaan linear tiga variabel yang ditanyakan.

Contoh:

Dengan menggunakan metode substitusi, tentukanlah himpunan penyelesaian sistem persamaan linier tiga variabel (SPLTV) berikut ini.

$$x + y - z = -3$$
$$x + 2y + z = 7$$
$$2x + y + z = 4$$

Penyelesaian:

Pertama, kita tentukan dulu persamaan yang paling sederhana. Dari ketiga persamaan yang ada, persamaan pertama lebih sederhana. Dari persamaan pertama, nyatakan variabel x sebagai fungsi y dan z sebagai berikut.

$$\Rightarrow x + y - z = -3$$
$$\Rightarrow x = -3 - y + z$$

Substitusikan peubah x ke dalam persamaan kedua

$$\Rightarrow x + 2y + z = 7$$
$$\Rightarrow (-3 - y + z) + 2y + z = 7$$
$$\Rightarrow -3 + y + 2z = 7$$
$$\Rightarrow y + 2z = 7 + 3$$
$$\Rightarrow y + 2z = 10 \text{.............................Pers. (3)}$$

Substitusikan variabel x ke dalam persamaan ketiga

$$\Rightarrow 2x + y + z = 4$$
$$\Rightarrow 2(-3 - y + z) + y + z = 4$$
$$\Rightarrow -6 - 2y + 2z + y + z = 4$$
$$\Rightarrow -y + 3z = 4 + 6$$
$$\Rightarrow -y + 3z = 10 \text{............................Pers. (4)}$$

Persamaan (3) dan (4) membentuk SPLDV y dan z:

$$y + 2z = 10$$
$$-y + 3z = 10$$

Selanjutnya kita selesaikan SPLDV tersebut dengan metode substitusi. Pilih salah satu persamaan yang paling sederhana yaitu persamaan pertama. Dari persamaan pertama, kita peroleh

$$\Rightarrow y + 2z = 10$$
$$\Rightarrow y = 10 - 2z$$

Substitusikan peubah y ke dalam persamaan kedua

$$\Rightarrow -y + 3z = 10$$
$$\Rightarrow -(10 - 2z) + 3z = 10$$

$$\Rightarrow -10 + 2z + 3z = 10$$
$$\Rightarrow -10 + 5z = 10$$
$$\Rightarrow 5z = 10 + 10$$
$$\Rightarrow 5z = 20$$
$$\Rightarrow z = 4$$

Substitusikan nilai z = 4 ke salah satu SPLDV, misal y + 2z = 10 sehingga kita peroleh

$$\Rightarrow y + 2z = 10$$
$$\Rightarrow y + 2(4) = 10$$
$$\Rightarrow y + 8 = 10$$
$$\Rightarrow y = 10 - 8$$
$$\Rightarrow y = 2$$

Selanjutnya, substitusikan nilai y = 2 dan z = 4 ke salah satu SPLTV, misal x + 2y + z = 7 sehingga kita peroleh

$$\Rightarrow x + 2y + z = 7$$
$$\Rightarrow x + 2(2) + 4 = 7$$
$$\Rightarrow x + 4 + 4 = 7$$
$$\Rightarrow x + 8 = 7$$
$$\Rightarrow x = 7 - 8$$
$$\Rightarrow x = -1$$

Dengan demikian, kita peroleh nilai x = –1, y = 2 dan z = 4. Sehingga himpunan penyelesaian dari SPLTV di atas adalah {(–1, 2, 4)}.

Untuk memastikan bahwa nilai x, y, dan z yang diperoleh sudah benar, kalian dapat mengeceknya dengan cara menyubstitusikan nilai x, y, dan z ke dalam tiga SPLTV di atas.
Persamaan pertama

$$\Rightarrow x + y - z = -3$$
$$\Rightarrow -1 + 2 - 4 = -3$$
$$\Rightarrow -34 = -3\ (benar)$$

Persamaan kedua

$$\Rightarrow\ x + 2y + z = 7$$
$$\Rightarrow -1 + 2(2) + 4 = 7$$
$$\Rightarrow -1 + 4 + 4 = 7$$
$$\Rightarrow\ 7 = 7\ (benar)$$

Persamaan ketiga

$$\Rightarrow\ 2x + y + z = 4$$
$$\Rightarrow\ 2(-1) + 2 + 4 = 4$$
$$\Rightarrow -2 + 2 + 4 = 4$$
$$\Rightarrow\ 4 = 4\ (benar)$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka bisa dipastikan bahwa nilai x, y dan z yang diperoleh sudah benar dan memenuhi sistem persamaan linear tiga variabel yang ditanyakan.

1.6 Kaidah Cramer.

Jika Ax = b adalah sebuah sistem linear *n* yang tidak di ketahui dan det(A)≠ 0 maka persamaan tersebut mempunyai penyelesaian yang unik

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}, |A| \neq 0$$

di mana:

A_j adalah matriks yang didapat dengan mengganti kolom $_j$ dengan matriks b

$|A|$ dan $|A_i|$= determinan matriks dengan mengganti kolom ke – i matriks A dengan kolom suku konstan.

Langkah-langkah menyelesaikan sistem persamaan linier menggunakan Metode Cramer terdiri dari:

1. Diketahui sistem persamaan linier

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

2. Ubah terlebih dahulu dalam bentuk matriks
   a. Pisahkan matriks untuk variabel dan koefisien di sebelah kanan sama dengan (=b)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

   b. Diketahui matriks A dengan ordo 3x3, dan matriks b (matriks kolom)
3. Tentukan determinan matriks A
4. Mengganti kolom dengan matriks b
   a. Mengganti kolom pertama dengan matriks b

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

   b. Mengganti kolom kedua dengan matriks b

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

   c. Mengganti kolom ketiga dengan matriks

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

5. Tentukan nilai determinan dari matriks baru hasil penggantian kolom dengan matriks b
6. Tentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 dengan rumusan

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

Contoh:

Tentukanlah x_1, x_2, dan x_3 dari sistem persamaan:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matriks A, A_1, A_2, dan A_3 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinan masing-masing:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$
$$|A_1| = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$
$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12$$
$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

Maka nilai x_1, x_2, dan x_3 masing-masing,

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-6}{-6} = 1$$
$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-12}{-6} = 2$$
$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-18}{-6} = 3$$

Nilai $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$

Contoh:
Tentukan solusi dari Sistem Persamaan Linear (SPL) di bawah ini

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 35$$
$$3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 85$$
$$2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 79$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 85 \\ 79 \end{bmatrix}$$

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} 35 & 3 & 1 \\ 85 & 11 & 2 \\ 79 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 35 & 1 \\ 3 & 85 & 2 \\ 2 & 79 & 5 \end{bmatrix}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 35 \\ 3 & 11 & 85 \\ 2 & 8 & 79 \end{bmatrix}$$

Determinan masing-masing:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 125$$
$$|A_1| = \begin{vmatrix} 35 & 3 & 1 \\ 85 & 11 & 2 \\ 79 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 375$$
$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 35 & 1 \\ 3 & 85 & 2 \\ 2 & 79 & 5 \end{vmatrix} = 750$$
$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & 35 & 1 \\ 3 & 85 & 2 \\ 2 & 79 & 5 \end{vmatrix} = 625$$

Maka nilai x_1, x_2, dan x_3 masing-masing,

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{375}{125} = 3$$
$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{750}{125} = 6$$
$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{625}{125} = 5$$

Nilai $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, dan $x_3 = 5$

1.7 Operasi Baris Elementer.

Sistem ini umumnya didapat kan dalam suatu tahapan dengan menerapkan ketiga tipe operasi berikut untuk menghilangkan bilangan–bilangan tak diketahui secara sistematis.

1. Kalikanlah persamaan dengan konstanta yang tak sama dengan nol.
2. Pertukarkanlah dua persamaan tersebut.
3. Tambahkanlah kelipatan dari satu persamaan bagi persamaan yang lainnya.

Karena baris (garis horizontal) dalam matriks yang diperbesar bersesuaian dengan persamaan dalam sistem yang diasosiasikan dengan baris tersebut, maka ketiga operasi ini bersesuaian operasi berikut pada baris matriks yang diperbesar.

1. Kalikanlah sebuah baris dengan konstanta yang tak sama dengan nol.
2. Pertukarkanlah dua baris tersebut.
3. Tambahkanlah kelipatan dari satu baris bagi baris yang lainnya.

- **Eliminasi Gauss.**

Prosedur tersebut didasarkan pada gagasan untuk mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk yang cukup sederhana sehingga persamaan tersebut dapat kita pecahkan dengan memeriksa sistem tersebut.

Matriks yang dinyatakan dalam bentuk *eselon baris tereduksi* (*reduced row–echelon form*) memiliki sifat-sifat:

a. Jika baris tidak seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1. (Kita namakan ini 1 utama).
b. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama–sama di bawah matriks.
c. Dalam sebarang dua matriks yang berurutan yang seluruhnya tak terdiri dari nol, maka satu utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari satu utama dari baris yang lebih tinggi.
d. Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Contoh:

Matriks-matriks berada dalam bentuk eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh:

Tentukanlah x_1, x_2, dan x_3 dari sistem persamaan linier berikut menggunakan Eliminasi Gauss:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1	1	1	6	
2	3	1	11	
-2	1	1	3	
1	1	1	6	Tukarkan b1 dengan b2
0	1	-1	-1	b2+(-2b1)
0	3	3	15	b3+2b1
1	1	1	6	
0	1	-1	-1	
0	0	6	18	b3+(-3b2)
1	1	1	6	
0	1	-1	-1	
0	0	1	3	b3*(1/6)
1	0	2	7	b1-b2
0	1	-1	-1	
0	0	1	3	
1	0	0	1	b1+(-2b3
0	1	0	2	b2+(b3)
0	0	1	3	

Terlihat bahwa matriks telah menjadi matriks identitas, dengan demikian proses selesai. Solusi dari SPL tersebut ditunjukkan pada bagian matriks yang telah termodifikasi yaitu (lihat sisi kanan matriks terakhir).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Maka nilai $x_1 = 1$, $x_{2=}$ 2, dan $x_{3=}3$.

Contoh:

Tentukan solusi dari Sistem Persamaan Linear (SPL) di bawah ini menggunakan Eliminasi Gauss.

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 35$$
$$3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 85$$
$$2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 79$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 11 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 85 \\ 79 \end{bmatrix}$$

1	3/4	1/4	8 3/4	b1/4
0	8 3/4	1 1/4	58 3/4	b2-3.(b1/4)
0	6 1/2	4 1/2	61 1/2	b3-2.(b1/4)
1	0	1/7	3 5/7	b1-0,75*(b2/8,75)
0	1	1/7	6 5/7	b2/8,75
0	0	3 4/7	17 6/7	b3-6,5*(b2/8,75)
1	0	0	3	b1-0,14*(b3/3,57)
0	1	0	6	b2-0,14*(b3/3,57)
0	0	1	5	b3/3,57

Terlihat bahwa matriks telah menjadi matriks Identitas, dengan demikian proses selesai. Solusi dari SPL tersebut ditunjukkan pada bagian matriks yang telah termodifikasi yaitu (lihat sisi kanan matriks terakhir)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Maka nilai $x_1 = 1$, $x_{2=}6$, dan $x_{3=}5$.

1.8 Determinan dan *Adjoint*.

Sistem persamaan linear di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{B=} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Sehingga:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan linear ini dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$A^{-1}AX = B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Matriks A^{-1}dapat dicari dari invers matriks *A*. Matriks *X* dapat dicari, apabila matriks *A* nonsingular.

Contoh:

Tentukanlah x_1, x_2, dan x_3 dari sistem persamaan menggunakan determinan.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$$

Determinan $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$

$$\text{Adj A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Maka nilai $x_1 = 1$, $x_{2=}$ 2, dan $x_{3=}3$.

1.9 Latihan.

1. Di sebuah toko Komar membeli 3 barang A dan 4 barang B dan dia harus membayar Rp2.700,00. Sedangkan Yayuk harus membayar Rp3.600,00 untuk pembelian 6 barang A dan 2 barang B. Jika Ratna membeli 1 barang A dan 1 barang B, maka ia harus membayar?
2. Ali, Boneng, dan Cecep berbelanja di sebuah toko buku. Ali membeli dua buah buku tulis, sebuah pensil dan sebuah penghapus dengan membayar Rp4.700,00 Boneng membeli sebuah buku tulis, dua buah pensil dan sebuah penghapus dengan membayar Rp4.300,00 Cecep membeli tiga buah buku tulis, dua buah pensil dan sebuah penghapus dengan membayar Rp7.100,00. Berapakah harga untuk sebuah buku tulis, harga sebuah pensil dan harga sebuah penghapus?

Selesaikanlah soal-soal berikut menggunakan determinan dan *adjoint*.

4. $3x_1 - 6x_2 = 8$
   $2x_1 + 5x_2 = 1$

5. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1$
   $x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$
   $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$

6. $2x_1 + x_2 + x_3 = 7$
   $3x_1 + 2x_2 + x_3 = -3$
   $x_2 + x_3 = 5$

Selesaikanlah soal-soal berikut menggunakan kaidah Cramer!

7. $3x_1 - 4x_2 = 5$
   $2x_1 + x_2 = 4$

8. $4x_1 + 5x_2 = 2$
   $11x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$
   $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1$

9. $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$
   $2x_1 - x_2 + x_3 = 2$
   $x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4$

10. $x_1 - x_2 + x_3 = 4$
    $2x_1 - x_2 = -2$
    $4x_1 - 3x_2 = 0$

11. $2x_1 - x_2 + x_3 = 8$
    $4x_1 + 3x_2 + x_3 = 7$
    $6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 15$

Selesaikanlah soal-soal berikut menggunakan matriks yang diperbesar (eliminasi Gauss-Jordan)

12. $x_1 - 3x_2 = b_1$
13. $4x_1 - 2x_2 = b_2$
    a. $b_1 = 1, b_2 = 4$
    b. $b_1 = -2, b_2 = 5$

14. $x_1 - 3x_2 - x_3 = b_1$
$-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = b_2$
$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = b_3$
   a. $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$
   b. $b_1 = -3, b_2 = 4, b_3 = -5$

15. $2x_1 - 5x_2 = b_1$
$x_1 + 3x_2 = b_2$
   a. $b_1 = 0, b_2 = 1$
   b. $b_1 = -4, b_2 = 6$
   c. $b_1 = -1, b_2 = 3$
   d. $b_1 = -5, b_2 = 1$

16. $x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1$
$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = b_2$
$3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = b_3$
   a. $b_2 b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = -1$
   b. $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 1$
   c. $b_1 = -1, b_2 = -1, b_3 = 0$

Selesaikanlah soal-soal berikut menggunakan metode matriks yang diperbesar dengan memecahkan sistem dalam kedua bagian secara bersama.

17. $x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$
$2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 - 7x_2 + x_3 = -1$

18. $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 - 5x_2 + x_3 = -1$
$3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0$

BAB II
PROGRAM LINIER

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu:

2.1 Formulasi model Program Linear Kasus Memaksimum Fungsi Tujuan
2.2 Formulasi model Program Linear Kasus Meminimumkan Fungsi Tujuan
2.3 Metode Penyelesaian Program Linear menggunakan Metode Grafik
2.4 Metode Penyelesaian Program Linear menggunakan Metode Simpleks

2.1 Program Linear

Model program linear dapat memiliki pembatas-pembatas linear yang bertanda (≤, =, dan ≥), dan peubah-peubah keputusannya dapat merupakan peubah nonnegatif, dapat pula peubah yang tidak terbatas dalam tanda (*unrestricted in sign*).

Tujuan pembuatan model ini adalah untuk memudahkan dan menganalisis perilaku sistem nyata dalam rangka memperbaiki kinerjanya. Kompleksitas sistem nyata yang terdiri dari banyak variabel menyulitkan si pengambil keputusan untuk membuat model. Biasanya di dalam suatu sistem nyata terdapat beberapa variabel yang dominan.

Oleh karena itu, representasi dari sistem nyata hanya akan mempertimbangkan elemen atau variabel yang mendominasi sistem nyata tersebut.

Dalam model program linear, dikenal dua macam fungsi yaitu: fungsi tujuan (*objective function*) dan fungsi-fungsi batasan (*constraint function*). Fungsi tujuan adalah fungsi yang menggambarkan tujuan atau sasaran yang berkaitan dengan pengaturan secara optimal sumber daya untuk memperoleh keuntungan maksimal atau biaya minimal. Sedangkan fungsi batasan merupakan bentuk penyajian secara matematis batasan-

batasan kapasitas yang tersedia yang akan dialokasikan secara optimal ke berbagai kegiatan.

Setelah masalah diidentifikasi, tujuan atau sasaran yang ingin dicapai ditetapkan, maka langkah selanjutnya adalah formulasi model matematis yang meliputi 3 tahap berikut:

1. Menentukan variabel keputusan (unsur-unsur dalam permasalahan yang dapat dikendalikan) dan kemudian nyatakan dalam simbol matematis.
2. Membentuk fungsi tujuan sebagai hubungan linear dari variabel keputusan.
3. Menentukan semua kendala atau batasan masalah tersebut dan ekspresikan dalam persamaan atau pertidaksamaan yang merupakan hubungan linear dari variabel keputusan yang mencerminkan keterbatasan sumber daya masalah tersebut.

Bentuk Umum Model Program Linier terdiri dari:

1. Memaksimumkan fungsi tujuan.

   $$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

   Terhadap kendala-kendala

   $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

   Di mana $x_j \ge 0, j = 1,2,..n$

2. Meminimumkan fungsi tujuan.

   $$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

   Terhadap kendala-kendala

   $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\ge b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\ge b_m \end{aligned}$$

   Di mana $x_j \ge 0, j = 1,2,..n$

2.2 Formulasi Model Program Linear Kasus Memaksimum Fungsi Tujuan

Contoh:

Sebuah perusahaan menghasilkan dua macam keluaran, yaitu barang A dan barang B. Bahan mentah yang digunakan 2 macam yaitu R dan S sebagai masukan. Barang A dan B menggunakan R dan S dalam proses produksinya. Setiap keluaran A memerlukan 4 unit masukan R dan 3 unit masukan S. Sedangkan keluaran B memerlukan 2 unit masukan R dan 4 unit masukan S. Harga jual produk A dan Produk B masing-masing Rp6.000,- dan Rp7.500,- per unit. Berapa unit A dan B harus dihasilkan agar penerimaan perusahaan maksimum, dengan keterbatasan atau kendala bahwa penggunaan masukan R dan S masing-masing tidak melebihi 100 unit dan 120 unit?

Penyelesaian:

Permasalahan di atas dapat ditabulasikan sebagai berikut.

Tabel 2.1 Permasalahan Metode *Simplex*

Sumber Daya	Barang A	Barang B	Kapasitas
Bahan R	4	2	100
Bahan S	3	4	120
Laba/unit	6000	7500	

1. Variabel Keputusan

   Masalah tersebut terdiri dari 2 variabel yang menunjukkan barang A dan barang B yang harus diproduksi oleh perusahaan. Jumlah tersebut dapat ditunjukkan sebagai berikut:

   a. x = jumlah barang A yang di buat
   b. y = jumlah barang B yang di buat

2. Fungsi Tujuan

   Tujuan masalah di atas adalah memaksimumkan keuntungan total. Keuntungan total adalah jumlah keuntungan yang diperoleh dari masing-masing produk. Keuntungan barang A adalah perkalian jumlah barang A dengan keuntungan per unit barang A. Begitu pun keuntungan barang B adalah jumlah barang B dengan keuntungan per unit barang B.

Sehingga fungsi tujuan masalah tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Maks } Z = 6000x + 7500y$$

3. Fungsi Kendala

Dalam masalah ini kendalanya adalah bahan baku Bahan R dan S. Setiap keluaran A memerlukan 4 unit masukan R dan 3 unit masukan S. Sedangkan keluaran B memerlukan 2 unit masukan R dan 4 unit masukan S. Kendala bahwa penggunaan masukan R dan S masing-masing tidak melebihi 100 unit dan 120 unit.

Penggunaan bahan baku ini bisa luwes, artinya bisa digunakan secara penuh atau sebagian saja, atau secara matematis di tulis dengan tanda "≤". Sehingga kendala bahan baku A dan B dapat ditulis:

$$4x + 2y \leq 100$$
$$3x + 4y \leq 120$$

4. Fungsi Non-Negativitas

Perlu diketahui bahwa masing-masing variabel perlu dibatasi hanya pada nilai positif, karena tidak mungkin menghasilkan produk dalam jumlah negatif. Kendala ini disebut kendala non-negativitas dan secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$x, y \geq 0$$

Jadi masalah tersebut di atas dapat diformulasikan sebagai model matematis sebagai berikut:

Fungsi tujuan

$$\text{Maks} \qquad Z = 6000x + 7500y$$

Fungsi Kendala

$$4x + 2y \leq 100$$
$$3x + 4y \leq 120$$

$$x, y \geq 0$$

Contoh:

Sebuah perusahaan A memproduksi empat jenis produk yang berbeda, yang masing-masing membutuhkan tiga macam bahan baku yaitu bahan A, B, dan C. Produk tersebut dikerjakan lewat 2 proses pengerjaan manual yaitu proses I dan II. Setiap unit produk ke I membutuhkan 10 ons bahan A, 6 ons bahan B, dan 12 ons bahan C. Setiap unit produk II membutuhkan 8 ons bahan A, 10 ons bahan B, dan 9 ons bahan C. Setiap unit produk III membutuhkan 6 ons bahan A, 8 ons bahan B, dan 5 ons bahan C. Produk IV membutuhkan 9 ons bahan A, 5 ons bahan B, dan 6 ons bahan C. Akibat keterbatasan gudang dan dana yang ada, maka bahan baku yang disediakan tiap minggu adalah 120 kg bahan A, 90 kg bahan B, dan 125 kg bahan C.

Setiap unit produk I membutuhkan waktu 4 jam pada proses I dan 2 jam proses II. Produk II setiap unit 3 jam pada proses I dan 4 jam proses II. Setiap unit produk III membutuhkan 2 jam proses I dan 3 jam proses II. Sedangkan produk IV setiap unitnya membutuhkan 6 jam proses I dan 5 jam proses II. Jumlah karyawan pada proses I sebanyak 10 orang, pada proses II sebanyak 12 orang. Perusahaan bekerja dengan 1 *shift*, mulai dari jam 08.00 sampai jam 16.00 dengan istirahat 1 jam mulai pukul 12.00-13.00, dan enam hari kerja dalam 1 minggu. Keuntungan per unit produk I, II, III, dan IV masing-masing sebesar Rp2.000, Rp1.900, Rp1.600, dan Rp2.100. Informasi dari bagian pemasaran menyatakan berapa pun jumlah produk yang dibuat perusahaan akan terserap seluruhnya oleh pasar.
Formulasikan masalah tersebut!

Penyelesaian:

Satuan bahan baku dibuat dalam satuan ons. Jumlah jam kerja karyawan per minggu pada proses I sebesar: 10 orang x 7 jam kerja per hari x 6 jumlah hari kerja dalam 1 minggu = 420, dan pada proses II sebesar 12 orang x 7 jam kerja per hari x 6 jumlah hari kerja dalam 1 minggu = 504. Permasalahan di atas dapat ditabulasikan sebagai berikut:

Tabel 2.2 Perumusan Produk Perusahaan A

Sumber Daya	Produk I	Produk II	Produk III	Produk IV	Kapasitas
Bahan A	10	8	6	9	1200
Bahan B	6	10	8	5	900
Bahan C	12	9	5	6	1250
Jam Proses I	4	3	2	6	420
Jam Proses II	2	4	3	5	504
Laba/unit	2000	1900	1600	2100	

Perumusan Permasalahan tersebut sebagai berikut:

1. Variabel Keputusan

   Masalah tersebut terdiri dari 4 variabel yang menunjukkan jumlah produk I, II, III, dan IV yang harus diproduksi oleh perusahaan. Jumlah tersebut dapat ditunjukkan sebagai berikut:

   a. x_1 = jumlah produk i yang di buat
   b. x_2 = jumlah produk ii yang di buat
   c. x_3 = jumlah produk iii yang di buat
   d. x_4 = jumlah produk iv yang di buat

2. Fungsi Tujuan

   Tujuan masalah di atas adalah memaksimumkan keuntungan total. Keuntungan total adalah jumlah keuntungan yang diperoleh dari masing-masing produk. Keuntungan produk I adalah perkalian jumlah produk I dengan keuntungan per unit produk I. Begitu pun keuntungan produk II adalah jumlah produk II dengan keuntungan per unit produk II, dan seterusnya. Sehingga fungsi tujuan masalah tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

   $$Maks\ Z = 2000x_1 + 1900x_2 + 1600x_3 + 2100x_4$$

3. Fungsi Kendala

   Dalam masalah ini kendalanya adalah bahan baku A, B, dan C serta jam kerja pada proses I dan II. Untuk menghasilkan 1 unit produk I dibutuhkan 10 ons bahan A sehingga total bahan baku A yang dibutuhkan adalah 10 X_1. Dengan cara yang sama produk II membutuhkan 8 X_2, produk III sebanyak 6 X_3, dan produk IV sebanyak 9 X_4. Jumlah bahan baku A yang tersedia sebanyak 1200 ons (dari 120 kg menjadi ons).

Penggunaan bahan baku ini bisa luwes, artinya bisa digunakan secara penuh atau sebagian saja, atau secara matematis di tulis dengan tanda "≤". Sehingga kendala bahan baku A dapat ditulis:

$$10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 9x_4 \leq 1200$$

Dan dengan cara yang sama kendala bahan baku B, C, jam kerja proses I dan II dapat ditulis sebagai berikut:

$$6x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 5x_4 \leq 900$$
$$12x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1250$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 420$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 504$$

4. Fungsi Non-Negativitas

Perlu diketahui bahwa masing-masing variabel perlu dibatasi hanya pada nilai positif, karena tidak mungkin menghasilkan produk dalam jumlah negatif. Kendala ini disebut kendala non-negativitas dan secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Jadi masalah tersebut di atas dapat diformulasikan sebagai model matematis sebagai berikut:
Fungsi tujuan:

$$\text{Maks } Z = 2000x_1 + 1900x_2 + 1600x_3 + 2100x_4$$

Fungsi kendala:

$$10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 9x_4 \leq 1200$$
$$6x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 5x_4 \leq 900$$
$$12x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 1250$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 420$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 504$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2.3 Formulasi Model Program Linear Kasus Meminimumkan Fungsi Tujuan

Contoh:

Perusahaan Smart memproduksi dua macam barang yaitu A dan B masing-masing menggunakan tiga macam bahan, yaitu K, L, dan M. Setiap unit A memerlukan 3 unit K, 4 unit L, dan 2 unit M. Sedangkan setiap unit B memerlukan 2 unit K, 1 unit L, dan 8 unit M. Biaya total untuk membuat barang A dan B masing-masing Rp4.500,- dan Rp5.000,- per unit. Setiap harinya perusahaan dapat menggunakan setidak-tidaknya 60 unit K, 40 unit L, dan 80 unit M. Berapa unit masing-masing barang sebaiknya dibuat agar biaya total harian optimal?

Formulasikan masalah tersebut!

Penyelesaian:

Tabel 2.3 Perumusan Produksi Barang Perusahaan Smart

Sumber Daya	Barang A	Barang B	Kapasitas
Bahan K	3	2	60
Bahan L	4	1	40
Bahan M	2	8	80
Biaya/unit	4500	5000	

Perumusan Permasalahan tersebut sebagai berikut:

1. Variabel Keputusan

   Masalah tersebut terdiri dari 2 variabel yang menunjukkan jumlah barang A, dan barang B yang harus diproduksi oleh perusahaan. Jumlah tersebut dapat ditunjukkan sebagai berikut:

   a. x_1 = jumlah barang A yang diproduksi

   b. x_2= jumlah barang B yang diproduksi

2. Fungsi Tujuan

   Tujuan masalah di atas adalah agar biaya total harian optimal. Kasusnya adalah meminimumkan. Sehingga fungsi tujuan masalah tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Minimum\ Z = 4500x_1 + 5000x_2$$

3. Fungsi Kendala

Dalam masalah ini kendalanya adalah bahan baku K, L, dan M Untuk menghasilkan 1 unit barang A memerlukan 3 unit K, 4 unit L, dan 2 unit M. Sedangkan setiap unit B memerlukan 2 unit K, 1 unit L, dan 8 unit M. Maka fungsi kendala dapat ditulis:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 60$$
$$4x_1 + x_2 \geq 40$$

4. Fungsi Non-Negatif

Perlu diketahui bahwa masing-masing variabel perlu dibatasi hanya pada nilai positif, karena tidak mungkin menghasilkan produk dalam jumlah negatif. Kendala ini disebut kendala non-negativitas dan secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Jadi masalah tersebut di atas dapat diformulasikan sebagai model matematis sebagai berikut:
Meminimumkan Fungsi tujuan $Z = 4500x_1 + 5000x_2$ terhadap Fungsi Kendala :

$$3x_1 + 2x_2 \geq 60$$
$$4x_1 + x_2 \geq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.4 Metode Grafik

Cara paling mudah untuk menyelesaikan masalah programasi linear yang mengandung dua atau tiga variabel keputusan adalah dengan metode grafik. Namun demikian, metode ini sebelumnya bukan merupakan metode yang efisien untuk menyelesaikan masalah-masalah dalam dunia nyata yang sangat kompleks. Tujuan utama mengetahui metode grafik adalah untuk memberikan pengertian dasar dan "rasa" terhadap karakteristik dari penyelesaian programasi linear. Dengan kata lain, kalau kita terbiasa dengan metode grafik maka akan mudah bagi kita untuk memahami rasionalitas metode programasi linear yang lain.

Sesuai namanya, metode grafik adalah metode programasi linear yang menggunakan bantuan grafik dalam proses menemukan penyelesaian. Dalam metode ini, fungsi-fungsi kendala digambarkan dalam grafik dua dimensi pada diagram Cartesius, di mana sumbu horizontal dan vertikal masing-masing menunjukkan variabel keputusan X_1 dan X_2, misalnya. Dengan demikian, titik-titik dalam diagram akan menunjukkan berbagai kombinasi tertentu dari X, dan X_2. Proses pengambilan keputusan atau pemecahan masalah dilakukan cara memilih titik-titik yang memenuhi kendala serta yang menghasilkan nilai fungsi tujuan yang paling besar bila khususnya adalah maksimisasi atau yang paling kecil bila kasusnya minimisasi.

Metode grafik ini merupakan metode yang dianggap paling simpel karena perhitungannya yang cenderung mudah dibandingkan metode program linear lainya. Metode grafik dapat digunakan untuk pemecahan masalah program linear yang hanya memiliki 2 variabel.

Sesuai dengan namanya, pemecahan program linear ini dilakukan dengan membuat grafik dari persamaan program linear yang telah diformulasikan, sehingga akan didapatkan titik-titik dari perpotongan garis-garis dalam grafik tersebut untuk mengetahui *output*-nya.

Langkah-langkah penyelesaian dengan metode grafik adalah:

1. Gambarkan garis-garis kendala pada sumbu koordinat. Anggap kendalanya sebagai suatu persamaan.
2. Tentukan daerah dalam bidang koordinat yang memenuhi semua kendala (daerah *feasible*), kemudian tentukan semua titik daerah *feasible* tersebut.
3. Hitung nilai fungsi tujuan untuk semua titik sudut daerah layak. Untuk keputusannya, pilih koordinat titik yang memberikan nilai terbesar untuk fungsi tujuan maksimasi, dan nilai fungsi terkecil untuk tujuan minimasi.

Contoh:

1. Memaksimumkan Fungsi tujuan

   Fungsi $Z = 6000x + 7500y$

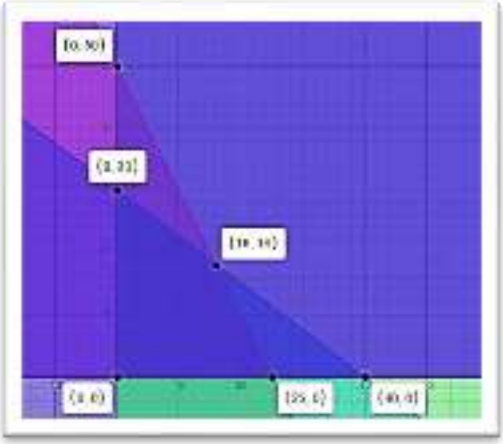
   Fungsi Kendala

   $4x + 2y \leq 100 \ldots\ldots(\mathrm{i})$

   $3x + 4y \leq 120 \ldots\ldots(\mathrm{ii})$

   $x, y \geq 0$

Penyelesaian:



Gambar 2.1 Memaksimumkan Fungsi $Z = 6000x + 7500y$

(i).

X	0	25
Y	50	0

Titik $(0,50), (25,0)$

(ii).

X	0	40
Y	30	0

Titik $(0,30), (40,0)$

Titik B $\Rightarrow$ titik potong garis (i) dan (ii)

Menggunakan metode eliminasi diperoleh;

$$\begin{array}{l|l} 4x + 2y = 100 & \times 2 \\ 3x + 4y = 120 & \times 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 8x + 4y = 200 \\ 3x + 4y = 120 \\ \hline 5x \quad = 80 \\ x \quad = 16 \end{array} -$$

Untuk menentukan nilai *y,* eliminasikan nilai x=16, selanjutnya diperoleh,

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 100 \\ 4.16 + 2y &= 100 \\ 2y &= 100 - 64 \\ 2y &= 36 \\ y &= 18 \end{aligned}$$

Sehingga titik B (16,18).

Untuk mengetahui titik maksimum dilakukan pengujian terhadap titik – titik sebagai berikut:

Tabel 2.4 Nilai Optimal

Titik	$Z = 6000x + 7500y$
O(0,0)	0
A(25,0)	150.000
B(16,18)	231.000
C(0,30)	225.000

Nilai optimal diperoleh pada titik B. Dengan kombinasi produk sebanyak 16 barang A dan 18 barang B.

Contoh:

PT Taufiq Sukses Makmur memproduksi dua macam barang yaitu A dan B masing-masing menggunakan tiga macam bahan, yaitu K, L, dan M. Setiap unit A memerlukan 3 unit K, 4 unit L, dan 2 unit M. Sedangkan setiap unit B memerlukan 2 unit K, 1 unit L, dan 8 unit M. Biaya total untuk membuat barang A dan B masing-masing Rp4.500,- dan Rp5.000,- per unit. Setiap harinya perusahaan dapat menggunakan setidak-tidaknya 60 unit K, 40 unit L, dan 80 unit M. Berapa unit masing-masing barang sebaiknya dibuat agar biaya total harian optimal?

Penyelesaian:

Tabel 2.5 Perumusan Produk PT Taufiq Sukses Makmur

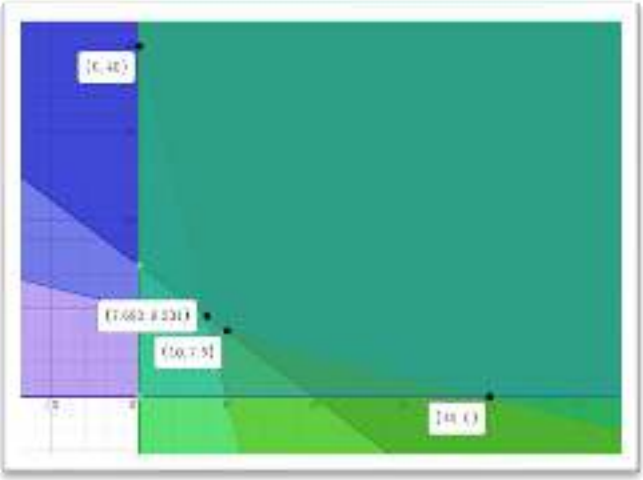
Sumber Daya	**Barang A**	**Barang B**	**Kapasitas**
Bahan K	3	2	60
Bahan L	4	1	40
Bahan M	2	8	80
Biaya/unit	4500	5000	

Meminimumkan Fungsi tujuan $Z = 4500x + 5000y$ terhadap

Fungsi Kendala : $3x + 4y \geq 60 \ldots\ldots (\text{i})$
$4x + y \geq 40 \ldots\ldots (\text{ii})$
$2x + 8y \geq 80 \ldots\ldots (\text{iii})$

Syarat : $x, y \geq 0$

Penyelesaian:



Gambar 2.2 Meminimumkan Fungsi tujuan $Z = 4500x + 5000y$

(i).

X	0	20
Y	30	0

Titik $(0{,}30),(20{,}0)$

(ii)

X	0	10
Y	40	0

Titik $(0{,}40),(10{,}0)$

(iii)

X	0	40
Y	10	0

Titik $(0{,}10),(40{,}0)$

Titik B $\Rightarrow$ titik potong garis (i) dan (ii)

Menggunakan metode eliminasi diperoleh;

$$\begin{array}{l|l} 3x + 2y = 60 & \times 1 \\ 4x + y = 40 & \times 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{||l} 3x + 2y = 60 \\ 8x + 2y = 80 \; - \\ \hline -5x \quad = -20 \\ \quad x \quad = 4 \end{array}$$

Untuk menentukan nilai *y,* eliminasikan nilai x=4, selanjutnya diperoleh,

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &= 60 \\
3.4 + 2y &= 60 \\
2y &= 60 - 12 \\
2y &= 48 \\
y &= 24
\end{aligned}
$$

Sehingga titik B (4,24).

Titik C $\Rightarrow$ titik potong garis (i) dan (iii)
Menggunakan metode eliminasi diperoleh;

$$
\begin{array}{l|l}
3x + 2y = 60 & \times 2 \\
2x + 8y = 80 & \times 3
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{||l}
6x + 4y = 120 \\
6x + 24y = 240 \\
\hline
\end{array}
\,_{-}
$$

$$
\begin{aligned}
-20y &= -120 \\
y &= 6
\end{aligned}
$$

Untuk menentukan nilai x, eliminasikan nilai y=6, selanjutnya diperoleh,

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &= 60 \\
3x + 2.6 &= 60 \\
3x &= 60 - 12 \\
3x &= 48 \\
x &= 16
\end{aligned}
$$

Sehingga titik C (16,6).

Untuk mengetahui titik maksimum dilakukan pengujian terhadap titik-titik sebagai berikut:

Tabel 2.6 Pengujian Terhadap Titik-Titik

Titik	$Z = 4500x + 5000y$
A(0,40)	200.000
B(4,24)	138.000
C(16,6)	102.000
D(40,0)	180.000

Biaya total minimum per hari diperoleh pada titik C. Dengan kombinasi produk sebanyak 16 barang A dan 6 barang B.

Contoh:

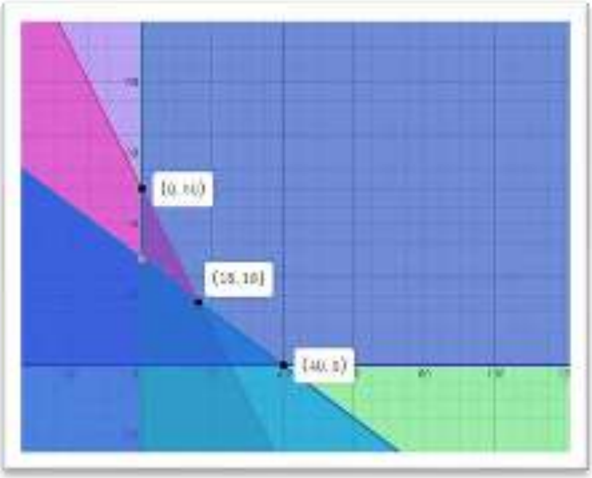
Memaksimumkan Fungsi tujuan $Z = 6000x + 7500y$ terhadap

Fungsi Kendala : $4x + 2y \leq 100 \ldots\ldots(\text{i})$

$3x + 4y \leq 120 \ldots\ldots(\text{ii})$

Syarat : $x, y \geq 0$

Penyelesaian:



Gambar 2.3 Memaksimumkan Fungsi tujuan $Z = 6000x + 7500y$

(i).

X	0	25
Y	50	0

Titik $(0,50), (25,0)$

(ii).

X	0	40
Y	30	0

Titik $(0,30), (40,0)$

Titik B $\Rightarrow$ titik potong garis (i) dan (ii)

Menggunakan metode eliminasi diperoleh;

$$\begin{array}{l|l} 4x+2y=100 & \times 2 \\ 3x+4y=120 & \times 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{||l} 8x+4y=200 \\ 3x+4y=120 \end{array}_{-}$$

$$\begin{array}{ll} 5x & = 80 \\ x & = 16 \end{array}$$

Untuk menentukan nilai *y*, eliminasikan nilai x=16, selanjutnya diperoleh,

$$\begin{aligned} 4x+2y &= 100 \\ 4.16+2y &= 100 \\ 2y &= 100-64 \\ 2y &= 36 \\ y &= 18 \end{aligned}$$

Sehingga titik B (16,18).

Untuk mengetahui titik maksimum dilakukan pengujian terhadap titik – titik sebagai berikut:

Tabel 2.7 Pengujian Terhadap Titik-Titik

Titik	$Z = 6000x + 7500y$
O(0,0)	0
A(25,0)	150.000
B(16,18)	231.000
C(0,30)	225.000

Nilai optimal diperoleh pada titik B. Dengan kombinasi produk sebanyak 16 barang A dan 18 barang B.

Contoh:

PT Taufiq memproduksi 2 macam produk yang dikerjakan secara manual. Setiap unit produk I memerlukan waktu 20 menit pada proses 2 dan 24 menit pada proses 3, sedangkan setiap unit produk II memerlukan waktu 15 menit pada proses 1, 16 menit proses 2, dan 30 menit proses 3.

Produk I memberikan keuntungan sebesar Rp170/unit dan Rp190/unit untuk produk II. Jam kerja per hari yang tersedia untuk proses 1, 2, dan proses 3 masing-masing 1050 menit, 1600 menit, dan 2400 menit. Berapakah jumlah produk I dan II harus diproduksi agar keuntungan maksimal?

Penyelesaian:
Permasalahan tersebut dapat ditabulasikan sebagai berikut:

Tabel 2.8 Permasalahan Produk PT Taufiq

Proses	Produk I	Produk II	Kapasitas (Menit)
1	–	15	1050
2	20	16	1600
3	24	30	2400
Keuntungan	170	190	

Langkah 1: Formulasikan program linear
Hasil dari formulasi didapatkan persamaan sebagai berikut:
Maksimumkan: $Z = 170x_1 + 190x_2$

Dengan kendala:

$$15x_2 \leq 1050$$
$$20x_1 + 16x_2 \leq 1600$$
$$24x_1 + 30x_2 \leq 2400$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

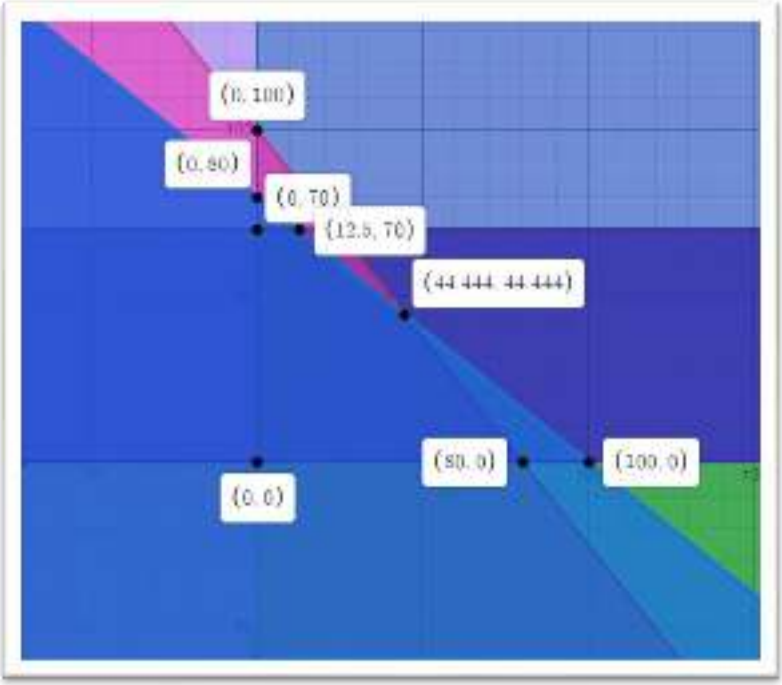
Langkah 2: Membuat Grafik

Untuk menggambarkan grafiknya, cara paling mudah adalah dengan menemukan nilai suatu variabel saat variabel lain bernilai nol.

$15x_2 = 1050$
$x_2 = 70 \rightarrow (0{,}70)$
$20x_1 + 16x_2 = 1600$
$X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 100 \rightarrow F(0{,}100)$
$X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 80 \rightarrow D(80{,}0)$
$24x_1 + 30x_2 = 2400$

$X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 80 \rightarrow F(0{,}80)$
$x_2 = 0 \rightarrow X1 = 100 \rightarrow D(100{,}0)$

Jadi jika dinyatakan dalam grafik adalah sebagai berikut:



Gambar 2.4 Memaksimumkan Fungsi tujuan: $Z = 170x_1 + 190x_2$

Dari hasil pengujian daerah *feasible*, maka yang memberikan nilai optimum adalah titik C. Jadi maksudnya jumlah produk 1 (X_1) yang harus dibuat adalah 400/9 dan jumlah produk 2 (X_2) yang harus dibuat adalah 400/9 agar produksi maksimal dengan nilai *output* sebesar 16.000

Contoh:

Perusahaan sepatu membuat 2 macam sepatu. Yang pertama merek Q, dengan sol karet, dan merek R dengan sol kulit. Diperlukan 3 macam mesin. Mesin 1 membuat sol karet, mesin 2 membuat sol kulit, dan mesin 3 membuat bagian atas sepatu dan melakukan *assembling* bagian atas dengan sol. Setiap lusin sepatu merek Q mula-mula dikerjakan di mesin 1 selama 2 jam, kemudian tanpa melalui mesin 2 terus dikerjakan di mesin 3 selama 6 jam. Sedang untuk sepatu merek R tidak diproses di mesin 1, tetapi pertama kali dikerjakan di mesin 2 selama 3 jam kemudian di mesin 3 selama 5 jam. Jam kerja maksimum setiap hari mesin 1 adalah 8 jam, mesin 2 adalah 15 jam, dan mesin 3 adalah 30 jam. Sumbangan terhadap laba setiap lusin sepatu merek Q = Rp30.000,00 sedang merek R = Rp50.000,00. Masalahnya adalah menentukan berapa lusin sebaiknya sepatu merek Q dan merek R yang dibuat agar bisa laba yang diperoleh maksimum?

Penyelesaian:
Tabel Permasalahan tersebut dapat ditabulasikan sebagai berikut:

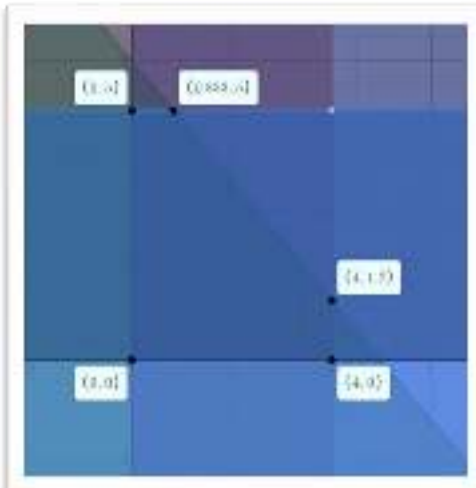
Tabel 2.9 Permasalahan Perusahaan Sepatu

Sumber Daya	**Sepatu Merek Q**	**Sepatu Merek R**	**Kapasitas**
Mesin 1	2	0	8
Mesin 2	0	3	15
Mesin 3	6	5	30
Laba/unit	30000	50000	

Maks $Z = 30000x_1 + 50000x_2$
Fungsi kendala:

$$2x_1 \leq 8$$
$$3x_2 \leq 15$$
$$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Menggunakan Grafik



Gambar 2.5 Memaksimumkan Fungsi tujuan $Z = 3000x_1 + 5000x_2$

Tabel 2.10 Nilai Pengujian Terhadap Titik-Titik Optimal

Titik	$\boldsymbol{Z = 3000x_1 + 5000x_2}$
O(0,0)	0
A4,0)	120000
B(4,1.2)	180000
C(5/6,5)	275000
C(0,5)	250000

Nilai optimal diperoleh pada titik C. Z maksimum Rp275000,-.

Contoh:

Sebuah perusahaan memproduksi dua macam barang yaitu A dan B masing-masing menggunakan tiga macam bahan, yaitu K, L, dan M. Setiap unit A memerlukan 3 unit K, 4 unit L, dan 2 unit M. Sedangkan setiap unit B memerlukan 2 unit K, 1 unit L, dan 8 unit M. Biaya total untuk membuat barang A dan B masing-masing Rp4.500,- dan Rp5.000,- per unit. Setiap harinya perusahaan dapat menggunakan setidak-tidaknya 60 unit K, 40 unit L, dan 80 unit M. Berapa unit masing-masing barang sebaiknya dibuat agar biaya total harian optimal?

Penyelesaian:

Permasalahan tersebut dapat ditabulasikan sebagai berikut:

Tabel 2.11 Permasalahan Produk Perusahaan

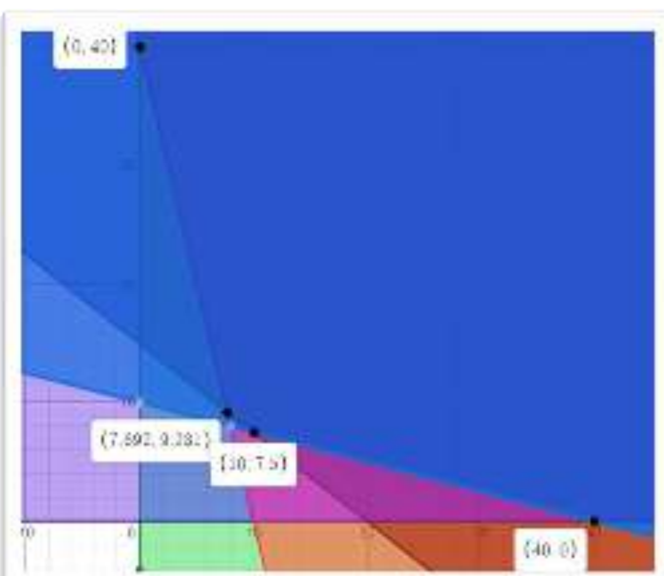
Sumber Daya	**Barang A**	**Barang B**	**Kapasitas**
Bahan K	3	2	60
Bahan L	4	1	40
Bahan M	2	8	80
Biaya/unit	4500	5000	

Meminimumkan Fungsi tujuan $Z = 4500x + 5000y$ terhadap

Fungsi Kendala :

$$3x + 4y \geq 60 \ldots\ldots(\text{i})$$
$$4x + y \geq 40 \ldots\ldots(\text{ii})$$
$$2x + 8y \geq 80 \ldots\ldots(\text{iii})$$
$$x, y \geq 0$$

Penyelesaian:



Gambar 2.6 Meminimumkan Fungsi tujuan $Z = 4500x + 5000y$

(i).

X	0	20
Y	30	0

Titik $(0,30),(20,0)$

(ii)

X	0	10
Y	40	0

Titik $(0,40),(10,0)$

(iii)

X	0	40
Y	10	0

Titik $(0,10),(40,0)$

Titik B $\Rightarrow$ titik potong garis (i) dan (ii)
Menggunakan metode eliminasi diperoleh;

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=60 \\ 4x+y=40 \end{array}\right| \begin{array}{l} \times 1 \\ \times 2 \end{array} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} 3x+2y=60 \\ 8x+2y=80 \end{array}\right._{-}$$

$$\begin{array}{ll} \hline -5x & =-20 \\ x & =4 \end{array}$$

Untuk menentukan nilai *y,* eliminasikan nilai x=4, selanjutnya diperoleh,

$$\begin{aligned} 3x+2y&=60 \\ 3.4+2y&=60 \\ 2y&=60-12 \\ 2y&=48 \\ y&=24 \end{aligned}$$

Sehingga titik B (4,24).

Titik C $\Rightarrow$ titik potong garis (i) dan (iii)
Menggunakan metode eliminasi diperoleh;

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=60 \\ 2x+8y=80 \end{array}\right| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 3 \end{array} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} 6x+4y=120 \\ 6x+24y=240 \end{array}\right._{-}$$

$$\begin{array}{rl} \hline -20y & =-120 \\ y & =6 \end{array}$$

Untuk menentukan nilai x, eliminasikan nilai y=6, selanjutnya diperoleh
$3x + 2y = 60$

$$3x + 2.6 = 60$$
$$3x = 60 - 12$$
$$3x = 48$$
$$x = 16$$

Sehingga titik C (16,6).

Untuk mengetahui titik maksimum dilakukan pengujian terhadap titik – titik sebagai berikut:

Tabel 2.12 Nilai Pengujian Terhadap Titik – Titik Optimal

Titik	$Z = 4500x + 5000y$
A(0,40)	200.000
B(4,24)	138.000
C(16,6)	102.000
D(40,0)	180.000

Biaya total minimum per hari diperoleh pada titik C. Dengan kombinasi produk sebanyak 16 barang A dan 6 barang B.

2.5 Metode Simpleks

Metode simpleks dikembangkan pertama kali oleh George Dantzing pada tahun 1947, sifat dari metode ini adalah iteratif, di mana penyelesaian masalah melalui tahapan perhitungan yang berulang-ulang sampai tercapai solusi optimum.

Metode simpleks adalah salah satu teknik pemecahan dalam program linear selain metode grafik.

Pemecahan program linear metode grafik sangat efektif digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan yang memiliki 2 variabel. Hanya saja, untuk menyelesaikan masalah program linear berdimensi lebih besar dari 2 variabel, metode simpleks adalah jawabannya.

Bentuk Standar Program Linear Metode Simpleks. Seperti yang sudah diuraikan pada artikel sebelumnya pada program linear, bahwa model program linear dapat memiliki pembatas-pembatas yang bertanda ≤, ≥, dan =. Demikian juga variabel-variabelnya yang dapat berupa variabel non-negatif, dapat pula berupa variabel-variabel yang tidak terbatas dalam tanda.

Dalam penyelesaian program linear dengan metode simpleks, bentuk dasar yang digunakan haruslah bentuk standar. Formulasi bentuk standar memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

1. Fungsi tujuannya dapat berupa maksimasi atau minimasi.
2. Seluruh pembatas sudah dalam bentuk persamaan (tanda =) dengan ruas kanan persamaan yang non-negatif.
3. Seluruh variabelnya harus merupakan variabel non-negatif.

Untuk mengubah suatu bentuk formulasi yang belum standar ke dalam bentuk standar dapat dilakukan dengan cara berikut:

1. Pembatas

   Pembatas yang bertanda ≤ atau ≥ dapat dijadikan suatu persamaan (tanda =) dengan menambahkan suatu variabel *slack* (S) atau mengurangkan dengan suatu variabel surplus (S).

   Contoh 1:

   $$x_1 + x_2 \leq 8$$

   Kita tambahkan *slack* s_1 pada ruas kiri persamaan tersebut sehingga diperoleh persamaan:

   $$x_1 + x_2 + s_1 \leq 8$$

   Variabel *slack* menunjukkan banyaknya sumber daya yang tidak terpakai.

   Contoh 2:

   $$x_1 + 2x_2 \geq 5$$

   Karena bertanda ≥ maka harus dikurangi dengan variabel s_2 pada ruas kiri persamaan sehingga diperoleh persamaan:

   $$x_1 + 2x_2 - s_2 = 5$$

   Variabel surplus menunjukkan kelebihan pemakaian sumber daya.

Ruas kanan dari suatu persamaan dapat dijadikan bilangan non-negatif dengan mengalikan kedua ruas dengan -1.

Contoh:

$$x_1 - 5x_2 = -7$$

secara matematis adalah sama dengan persamaan

$$-x_1 + 5x_2 = 7$$

Arah ketidaksamaan dapat berubah apabila kedua ruas dikalikan -1

Contoh:

$$x_1 - x_2 \leq -8$$

adalah sama dengan

$$-x_1 + x_2 \geq 8$$

2. Variabel

   Suatu variabel x_i Xi yang tidak terbatas oleh tanda dapat dinyatakan sebagai dua variabel non-negatif dengan menggunakan substitusi: $x_i = x_i' - x_i''$ di mana x_i' dan $x_i'' \geq 0$. Substitusi seperti ini harus dilakukan pada seluruh pembatas dan fungsi tujuannya.

3. Fungsi Tujuan

   Maksimasi dari sebuah fungsi adalah sama dengan minimasi dari negatif fungsi yang sama.

Metode *simplex* ialah suatu metode yang memerlukan *perhitungan berulang-ulang* atau sering disebut prosedur iteratif (*iterative prosedure*). Langkah-langkah yang diperlukan untuk melakukan perhitungan dengan menggunakan metode *simplex* bisa diuraikan sebagai berikut:
(Perhatikan: Kita anggap, bahwa kita sudah mempunyai suatu pemecahan dasar yang fisibel yaitu x_B dari suatu Permasalahan linear *programming* di mana Z merupakan nilai fungsi tujuan dan untuk semua A_j, Y_j dan z_j — c_j yang bersangkutan dengan pemecahan dasar yang fisibel tersebut diketahui).

1. Selidiki semua nilai z_j — c_j. Setelah itu perhatikan tiga hal berikut:
   a. Semua nilai z_j — $c_j \geq 0$. Di dalam hal ini pemecahan dasar fisibel yang bersangkutan sudah memberikan pemecahan yang optimum (optimal solution). Proses ini dihentikan, sebab pemecahan sudah selesai.
   b. Satu atau lebih nilai z_j — $c_j < 0$ dan untuk paling tidak satu A_k untuk mana

$$z_k - c_k < 0, \text{ dan semua } y_{ik} \leq O.$$

   Di dalam hal ini pemecahan menjadi *tak ada batasnya* (*unbounded solution*).
   c. Satu atau lebih nilai zj — cj < 0 dan masing-masing dari padanya mempunyai yij>0 paling tidak untuk satu i.
   Kemudian pilihlah salah satu vektor, katakan A_k dan masukkan kedalam basis.

2. Kalau hasilnya ternyata termasuk kategori lc)., maka tentukan vektor yang akan dikeluarkan/disingkirkan dari matriks basis B dengan mempergunakan syarat berikut:

$$\frac{x_{B_r}}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{X_{B_i}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\}$$

   maka kolom ke-r kemudian dikeluarkan dan diganti dengan A_k. Kita hitung nilai-nilai yang baru.
3. Dengan mempergunakan rumus-rumus berikut:

   a. $x'_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \dfrac{y_{ij}}{y_{rj}}$, untuk $i \neq r$

   $x'_{Br} = \dfrac{x_{Br}}{y_{rj}}$, untuk $i = r$

   b. $Z'_{Br} = Z + \dfrac{x_{Br}}{y_{rj}} \left(c_j - z_j \right)$

c. $Y'_{Bi} = y_{ij} - y_{rj}\dfrac{y_{ik}}{y_{rk}}$, untuk $i \neq r$

$Y'_{rj} = \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}$, untuk $i = r$

d. $z'_j - c_j = z_j - c_j - \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}\left(z_k - c_k\right)$

Dengan indeks atau *subscript* k menggantikan j khususnya dalam rumus a & b di atas; maka hitunglah nilai-nilai x'_B, Z' dan $z'_j - c_j$ untuk semua j. Perhitungan-perhitungan tersebut sangat diperlukan untuk memperoleh pemecahan dasar baru yang fisibel.

Kemudian kembali keurutan yang pertama yaitu nomor 1 di atas. Apabila tidak ada "*degeneracy*" *procedure* iteratif ini akan menghasilkan pemecahan dasar yang fisibel di dalam jumlah urutan/langkah yang terbatas, itulah dasar-dasar dari pada perhitungan metode *simplex* untuk memecahkan Permasalahan linear *programming*.

Di dalam praktiknya, bahkan apabila perhitungannya dilakukan dengan menggunakan *electronic computer*, rumus yang terakhir itulah yang sering dipergunakan yaitu memilih nilai $z_j - c_j$ yang terkecil (minimum). Penggunaan rumus yang terakhir tersebut untuk menentukan vektor yang harus dimasukkan kedalam basis mungkin menghasilkan dua vektor atau lebih dengan nilai minimum yang sama dari $z_j - c_j$. Di dalam hal ini tentu saja vektor yang dimasukkan ke dalam basis tidak bisa ditentukan secara unik, sebab ada lebih dari satu. Maka pilihannya bisa ditentukan dengan 2 cara berikut:

1. Dengan cara undian, misalnya dengan jalan melemparkan mata uang (hal ini dilakukan kalau perhitungan dilakukan dengan tangan).
2. Dengan memilih vektor yang mempunyai nilai indeks/*subscript* j terkecil.

Apabila permasalahan linear *programming* tersebut untuk membuat fungsi tujuan menjadi minimum, maka kriteria yang dipergunakan adalah sebagai berikut:

3. $\frac{x_{B_r}}{y_{rk}}(c_k - z_k) = \min_j \left\{ \frac{x_{B_r}}{y_{rj}}(c_j - z_j) \right\}, c_j - z_j > 0$

4. $c_k - z_k = \min_j (c_j - z_j), c_j - z_j > 0$

Tabel Untuk Perhitungan Metode *Simplex*

Tabel 2.13 Perhitungan Metode *Simplex*

			c_1	c_2	…	c_j	…	c_n
c_B	Vektor Dalam Basis	H	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n
c_{B1}	B_1	$x_{B1}=y_{10}$	y_{11}	y_{12}	…	y_{1j}	…	y_{1n}
c_{B2}	B_2	$x_{B2}=y_{20}$	y_{21}	y_{22}	…	y_{2j}	…	y_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
c_{Bi}	B_i	$x_{Bi}=y_{i0}$	y_{i1}	y_{i2}	…	y_{ij}	…	y_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
c_{Bm}	B_m	$x_{Bm}=y_{m0}$	y_{m1}	y_{m2}	…	y_{mj}	…	y_{mn}
		$Z=y_{m+1,0}$	$z_1 - c_2 = y_{m+1,1}$	$z_2 - c_2 = y_{m+1,2}$	…	$z_j - c_j = y_{m+1,j}$		$z_n - c_n = y_{m+1,n}$

Keterangan:

1. Kolom pertama dari pada tabel memberikan CB yaitu prices dari vektor-vektor dalam basis.
2. Kolom kedua memberikan vektor-vektor yang ada dalam basis (sebanyak m).
3. Bi ialah vektor dari A yang berada di kolom i dari B dlsb. (Matrix A dari persamaan AX = H, Permasalahan linear *programming* yang standard).
4. Kolom ketiga dari tabel dengan huruf H, memberikan nilai xB yang baru (*current value*), dengan nilai fungsi objektif Z pada bans yang terakhir, sebagai pemecahan dasar fisibel yang bersangkutan.
5. Kolom-kolom lainnya bisa kita lihat nilai dari Yj untuk semua vektor A dan termasuk juga vektor-vektor buatan yang telah dimasukkan (kalau ada)

6. Baris pertama dari pada tabel memberikan *prices* yang berasosiasi dengan vektor-vektor yang bersangkutan, misalnya *price* $_5$ untuk
7. vektor Aj.

Kita harus tahu kolom yang mana dari A yang berada di kolom i dari basis, hal ini perlu untuk menentukan variabel x_j yang sesuai dengan x_{Bi}. Untuk mencari variabel xj yang sesuai dengan x_{Bi}, kita lihat basis di kolom 3 di mana terdapat x_{Bi}, sekaligus bisa kelihatan vektor mana variabel ini sesuai dengannya. Dengan argumentasi yang sama, *price* c_j yang sesuai dengan c_{Bi} bisa dicari.

Contoh:
Maksimumkan: $Z = 15x_1 + 18x_2 + 12x_3$

Kendala:

$$10x_1 + 12x_2 + 8x_3 \leq 120$$
$$18x_1 + 15x_2 + 6x_3 \leq 135$$
$$12x_1 + 16x_2 + 6x_3 \leq 150$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Langkah 1: Mengubah Fungsi Tujuan dan Fungsi Kendala

Fungsi tujuan diubah menjadi bentuk implisit dengan jalan menggeser fungsi tujuan ke Z, yaitu: $Z = 15x_1 + 18x_2 + 12x_3$diubah menjadi: $Z - 15x_1 - 18x_2 - 12x_3 = 0$

Sedangkan fungsi kendala (selain kendala non-negatif) diubah menjadi bentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack*, yaitu suatu variabel yang mewakili tingkat pengangguran kapasitas yang merupakan batasan.

Fungsi kendala pada soal tersebut di atas berubah menjadi:

$$10x_1 + 12x_2 + 8x_3 + s_1 = 120$$
$$18x_1 + 15x_2 + 6x_3 + s_2 = 135$$
$$12x_1 + 16x_2 + 6x_3 + s_3 = 150$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Langkah 2: Menabulasikan Persamaan-Persamaan Fungsi Tujuan dan Kendala yang Telah Diubah Seperti pada Langkah 1 di Atas.

Tabel 2.14 Perhitungan Metode *Simplex*

			15	**18**	**12**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	120	10	12	8	1	0	0	
0	S_2	135	18	15	6	0	1	0	
0	S_3	150	12	16	6	0	0	1	
	Z	0	0	0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-15	-18	-12	0	0	0	

Keterangan.

CB : koefisien variabel basis yang masuk pada fungsi tujuan

VDB : variabel basis yang masuk

NK : nilai kanan persamaan, yaitu nilai di belakang tanda "=“

z_j : nilai fungsi tujuan, yaitu jumlah dari hasil kali variabel ke-j dan CB

c_j : koefisien variabel pada fungsi tujuan (bilangan yang terletak di atas variabel)

Kolom basis menunjukkan variabel yang sedang menjadi basis yaitu S_1**,** S_2**,** S_3 yang nilainya ditunjukkan oleh kolom solusi. Secara tidak langsung ini menunjukkan bahwa variabel non-basis X_1, X_2, X_3 (yang tidak masuk pada kolom basis) sama dengan nol.

Hal ini bisa dimengerti, karena belum ada kegiatan/produksi X_1, X_2, X_3 masing-masing nilainya nol yang berarti juga kapasitas masih menganggur yang ditunjukkan oleh nilai S_1**,** S_2**,** S_3.

Langkah 3: Menentukan Kolom Pivot

Setelah kita menabulasikan persamaan menjadi bentuk tabel simpleks, langkah selanjutnya adalah memilih kolom pivot. Kolom pivot (*entering variabel*) dipilih dari baris Z dengan angka negatif terbesar untuk masalah maksimasi. Jadi sesuai soal di atas didapatkan bahwa kolom pivotnya adalah $\mathbf{X_2}$.

Sehingga jika digambarkan dalam tabel menjadi:

Tabel 2.15 Perhitungan Metode *Simplex*

			15	**18**	**12**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	120	10	12	8	1	0	0	
0	S_2	135	18	15	6	0	1	0	
0	S_3	150	12	16	6	0	0	1	
	Z	0	0	0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-15	-18	-12	0	0	0	

Pada tabel di atas kolom $\mathbf{X_2}$ adalah kolom yang dipilih karena memiliki nilai -18 (nilai negatif terbesar).

Langkah 4: Menentukan Baris Pivot

Setelah kita mendapatkan kolom pivot, langkah selanjutnya adalah menentukan baris pivot (*leaving variabel*). Untuk mengetahui baris mana yang pilih dapat dilakukan dengan membagi solusi dengan kolom pivot pada setiap baris.

Setelah itu dipilihlah angka dengan rasio terkecil, namun jika terdapat angka negatif dan tidak hingga kolom pivot maka tidak masuk dalam perhitungan rasio, jadi jika terdapat angka negatif atau tak hingga maka diberi tanda strip pada kolom rasio. Setelah mendapat rasio maka kita harus memindahkan variabel pada kolom pivot ke baris pivot.

Sehingga berdasarkan soal di atas menjadi:

Tabel 2.16 Perhitungan Metode *Simplex*

			15	**18**	**12**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	120	10	12	8	1	0	0	10
0	S_2	135	18	15	6	0	1	0	9
0	S_3	150	12	16	6	0	0	1	9,375
	Z	0	0	0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-15	-18	-12	0	0	0	

Langkah 5: Menentukan Persamaan Pivot Baru
Rumus untuk menentukan persamaan pivot baru adalah:

Persamaan Pivot Baru = Baris Pivot Lama/Elemen Pivot.

Elemen pivot adalah perpotongan antara kolom dan baris pivot. Jadi setiap baris pivot yang telah ditentukan dibagi dengan elemen pivot sehingga dihasilkan persamaan pivot baru.

Sehingga dari berdasarkan soal di atas menjadi:

b1-12.(b2/15)
b2/15
b3-16*(b2/15)

Berdasarkan tabel di atas semua baris pivot dibagi dengan elemen pivot yaitu 15. Sehingga dihasilkan persamaan pivot yang baru.

Langkah 6: Menentukan Persamaan Baru Selain Persamaan Pivot Baru

Setelah mendapat persamaan pivot baru, langkah selanjutnya adalah mengisi persamaan lainya yang masih kosong. Rumus untuk menentukan persamaan baru selain persamaan pivot baru adalah sebagai berikut:

Persamaan baru = (persamaan lama) – (persamaan pivot baru x koefisien kolom pivot)

Jadi persamaan baru yang dicari dari Permasalahan di atas adalah persamaan baru untuk basis Z, S_1, dan S_3. Sedangkan S_2 sudah diganti oleh persamaan pivot baru X_2.

Persamaan pivot baru, Z baru, S1 baru, dan persamaan S3 baru yang sudah dicari nilainya kemudian ditabulasikan dalam tabel simpleks baru sebagai berikut:

Tabel 2.17 Perhitungan Metode *Simplex*

			15	**18**	**12**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	12,00	-4,40	0,00	3,20	1,00	-0,80	0,00	3,75
18	X_2	9,00	1,20	1,00	0,40	0,00	0,07	0,00	22,50

CB	Basis	NK	**15** X1	**18** X2	**12** X3	**0** S1	**0** S2	**0** S3	Rasio
0	S_3	6,00	-7,20	0,00	-0,40	0,00	-1,07	1,00	-15,00
	Z	162,00	21,60	18,00	7,20	0,00	1,20	0,00	
	Z_j-Cj		6,60	0,00	-4,80	0,00	1,20	0,00	

Langkah 7: Lanjutkan Perbaikan-Perbaikan

Periksa kembali tabel simpleks anda, apakah pada baris Z angkanya sudah positif semua (≥ 0) untuk kasus maksimasi, jika sudah positif semua berarti solusi optimal sudah didapatkan.

Terlihat pada langkah 6 di atas baris Z masih ada yang negatif yaitu kolom X_3. Maka perlu dilakukan perbaikan untuk mencapai nilai optimal.

b1/3,2
b2-0,4*(b1/3,2)
b3-(-0,4)*(b1/3,2)

Maka dari itu diperlukan perbaikan. Dalam perbaikan anda hanya perlu mengulangi kembali dari langkah 3 dari tabel yang sudah anda hitung. Lakukan secara terus menerus hingga baris Z bernilai positif semua.

Setelah dilakukan perbaikan, maka tabel optimal dari contoh di atas akan didapatkan sebagai berikut:

Tabel 2.18 Perhitungan Metode *Simplex*

CB	Basis	NK	**15** X1	**18** X2	**12** X3	**0** S1	**0** S2	**0** S3	Rasio
12	X_3	3,75	-1,38	0,00	1,00	0,31	-0,25	0,00	
18	X_2	7,50	1,75	1,00	0,00	-0,13	0,17	0,00	
0	S_3	7,50	-7,75	0,00	0,00	0,13	-1,17	1,00	
	Z	180,00	15,00	18,00	12,00	1,50	0,00	0,00	
	Z_j-Cj		0,00	0,00	0,00	1,50	0,00	0,00	

Berdasarkan tabel hasil perbaikan di atas dapat disimpulkan bahwa hasil iterasi ini telah mencapai kondisi optimal, karena nilai pada baris fungsi tujuan Z sudah tidak ada yang negatif. Dapat disimpulkan bahwa $x_1 = 0, x_2 = 7{,}5\ dan\ x_3 = 3{,}75$ dengan maksimum $z = 180$.

Contoh:
Maksimumkan: $Z = 3x_1 + 5x_2$

Kendala:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Kendala menjadi:

$$2x_1 + 4x_2 + s_1 = 10$$
$$2x_1 + 2x_2 + s_2 = 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Menabulasikan persamaan-persamaan fungsi tujuan dan kendala yang telah diubah ke dalam tabel berikut.

Tabel 2.19 Perhitungan Metode *Simplex*

			3	**5**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
0	S_1	10	2	4	1	0	
0	S_2	8	2	2	0	1	
	Z	0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-3	-5	0	0	

Tabel 2.20 Perhitungan Metode *Simplex*

			3	**5**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
0	S_1	10	2	4	1	0	2 1/2
0	S_2	8	2	2	0	1	4
	Z	0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-3	-5	0	0	

B1/4
B2-2*(B1/4)

Tabel 2.21 Perhitungan Metode *Simplex*

			3	5	0	0	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
5	S_1	2 1/2	1/2	1	1/4	0	5
0	S_2	3	1	0	- 1/2	1	3
	Z	12 1/2	2 1/2	5	1 1/4	0	
	Z_j-Cj		-0,5	0	1,25	0	

B1-(1/2)*B2

Tabel 2.22 Perhitungan Metode *Simplex*

			3	5	0	0	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
5	X_2	1	0	1	1/2	- 1/2	
3	X_1	3	1	0	- 1/2	1	
	Z	14	3	5	1	1/2	
	Z_j-Cj		0	0	1	0,5	

Berdasarkan tabel hasil perbaikan di atas dapat disimpulkan bahwa hasil iterasi ini telah mencapai kondisi optimal, karena nilai pada baris fungsi tujuan Z sudah tidak ada yang negatif. Dapat disimpulkan bahwa $x_1 = 3, x_2 = 1$ dengan maksimum $z = 14$.

Contoh:
Maksimumkan: $Z = 5x_1 + 3x_2$

Kendala:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Kendala menjadi:

$$3x_1 + 5x_2 + s_1 = 15$$
$$5x_1 + 2x_2 + s_2 = 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Menabulasikan persamaan-persamaan fungsi tujuan dan kendala yang telah diubah ke dalam tabel berikut.

Tabel 2.23 Perhitungan Metode *Simplex*

Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2
S_1	15	3	5	1	0
S_2	10	5	2	0	1
Z	0	0	0	0	0
Z_j-Cj		-5	-3	0	0

Tabel 2.24 Perhitungan Metode *Simplex*

Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
S_1	15	3	5	1	0	5
S_2	10	5	2	0	1	3 1/3
Z	0	0	0	0	0	
Z_j-Cj		-5	-3	0	0	

Tabel 2.25 Perhitungan Metode *Simplex*

Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
S_1	9	0	3 4/5	1	- 3/5	2 3/8
X_1	2	1	2/5	0	1/5	5
Z	10	5	2	0	1	
Z_j-Cj		0	-1	0	1	

B1/(19/5)
B2-2/5*(B1/(19/5))

Tabel 2.26 Perhitungan Metode *Simplex*

Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
X_2	2 3/8	0	1	1/4	- 1/6	
X_1	1	1	0	- 1/9	1/4	
Z	12 3/8	5	3	1/4	5/6	
Z_j-Cj		0	0	1/4	5/6	

Berdasarkan tabel hasil perbaikan di atas dapat disimpulkan bahwa hasil iterasi ini telah mencapai kondisi optimal, karena nilai pada baris fungsi tujuan Z sudah tidak ada yang negatif. Dapat disimpulkan bahwa $x_1 = 1, x_2 = 2\ 3/8$ dengan maksimum $z = 12\ 3/8$.

Contoh:
Maksimumkan: $Z = 4000x_1 + 1000x_2$

Kendala:

$$10x_1 + 2x_2 \leq 300$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 120$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 100$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Kendala menjadi:

$$10x_1 + 2x_2 + s_1 = 300$$
$$3x_1 + 2x_2 + s_2 = 120$$
$$2x_1 + 2x_2 + s_3 = 100$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Menabulasikan persamaan-persamaan fungsi tujuan dan kendala yang telah diubah ke dalam tabel berikut.

Tabel 2.27 Perhitungan Metode *Simplex*

CB	**Basis**	**NK**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**Rasio**
0	S_1	300	10	2	1	0	0	
0	S_2	120	3	2	0	1	0	
0	S_3	100	2	2	0	0	1	
	Z	0	0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-4000	-1000	0	0	0	

Tabel 2.28 Perhitungan Metode *Simplex*

			4000	**1000**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	300	10	2	1	0	0	30
0	S_2	120	3	2	0	1	0	40
0	S_3	100	2	2	0	0	1	50

Z	0	0	0	0	0	0	
Z_j-Cj		-4000	-1000	0	0	0	

B1/10
B2-3(B1/10)
B3-2(B1/10)

Tabel 2.29 Perhitungan Metode *Simplex*

			4000	**1000**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Rasio
4000	X_1	30	1	1/5	0	0	0	150
0	S_2	30	0	1 2/5	- 1/3	1	0	21 3/7
0	S_3	40	0	1 3/5	- 1/5	0	1	25
	Z	120000	4000	800	400	0	0	
	Z_j-Cj		0	-200	400	0	0	

B1-1/5(B2/1 2/5)
B2/(1 2/5)
B3-1 3/5*(B2/1 2/5)

Tabel 2.30 Perhitungan Metode *Simplex*

CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Rasio
4000	X_1	25 5/7	1	0	1/7	- 1/7	0	
1000	X_2	21 3/7	0	1	- 2/9	5/7	0	
0	S_3	5 5/7	0	0	1/7	-1 1/7	1	
	Z	124285 5/7	4000	1000	357 1/7	142 6/7	0	
	Z_j-Cj		0	0	357,1428571	142,85714	0	

Z_j-Cj sudah tidak ada yang negatif, maka program telah optimal. Dapat disimpulkan bahwa $x_1 = 25\ 5/7, x_2 = 21\ 3/7$ dengan maksimum $z = 124285\ 5/7$.

Contoh:
Fungsi tujuan
Maksimumkan: $Z = 85000x_1 + 75000x_2 + 70000x_3$

Kendala:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 17$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 22$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 30$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Penyelesaian:

Langkah 1

Ubah sistem pertidaksamaan ke dalam sistem persamaan linear dengan menambahkan variabel tiruan atau disebut *slack*.

Fungsi tujuan

Maksimumkan: $Z = 85000x_1 + 75000x_2 + 70000x_3$

Sedangkan fungsi kendala (selain kendala non-negatif) diubah menjadi bentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack*, yaitu suatu variabel yang mewakili tingkat pengangguran kapasitas yang merupakan batasan. Fungsi kendala pada soal tersebut di atas berubah menjadi:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 17$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 22$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_3 = 30$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Langkah 2

Menyusun semua persamaan ke dalam tabel simpleks.

Tabel 2.31 Perhitungan Metode *Simplex*

			85000	75000	70000	0	0	0	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	17	1	1	2	1	0	0	
0	S_2	22	2	2	1	0	1	0	
0	S_3	30	3	2	2	0	0	1	
	Z	0	0	0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-85000	-75000	-70000	0	0	0	

Langkah 3

Menentukan kolom kunci, baris kunci, bilangan kunci, dan rasio

Kolom kunci	:	suatu kolom yang nilai zj-cj
Baris kunci	:	baris yang memiliki rasio positif paling kecil
Bilangan kunci	:	bilangan yang terletak pada pertemuan antara kolom kunci dan baris kunci
Rasio	:	bilangan yang ditentukan oleh perbandingan antara NK dan kolom kunci

Rasio untuk baris pada variabel:

$$s_1 = \frac{17}{1} = 17$$
$$s_1 = \frac{22}{2} = 11$$
$$s_1 = \frac{30}{3} = 10$$

Tabel 2.32 Perhitungan Metode *Simplex*

CB	Basis	NK	85000 X_1	75000 X_2	70000 X_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	Rasio
0	S_1	17	1	1	2	1	0	0	17
0	S_2	22	2	2	1	0	1	0	11
	S_3	30	3	2	2	0	0	1	10
	Z	0	0	0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-85000	-75000	-70000	0	0	0	

Membuat baris baru dengan mengubah nilai-nilai baris selain baris kunci melalui operasi baris elementer (OBE), sehingga nilai-nilai kolom kunci

Tabel 2.33 Perhitungan Metode *Simplex*

			85000	**75000**	**70000**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	7	0	1/3	1 1/3	1	0	- 1/3	21
0	S_2	2	0	2/3	- 1/3	0	1	- 2/3	3
85000	X_1	10	1	2/3	2/3	0	0	1/3	15
	Z	850000	85000	56666 2/3	56666 2/3	0	0	28333 1/3	
	Z_j-Cj		0	-18333 1/3	-13333 1/3	0	0	28333 1/3	

Tabel 2.34 Perhitungan Metode *Simplex*

			85000	**75000**	**70000**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	6	0	0	1 1/2	1	- 1/2	0	4
75000	X_2	3	0	1	- 1/2	0	1 1/2	-1	-6
85000	X_1	8	1	0	1	0	-1	1	8
	Z	905000	85000	75000	47500	0	27500	10000	
	Z_j-Cj		0	0	- 22500	0	27500	10000	

Tabel 2.35 Perhitungan Metode *Simplex*

			85000	**75000**	**70000**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Rasio
70000	X_3	4	0	0	1	2/3	- 1/3	0	
75000	X_2	5	0	1	0	1/3	1 1/3	-1	
85000	X_1	4	1	0	0	- 2/3	- 2/3	1	
	Z	995000	85000	75000	70000	15000	20000	10000	
	Z_j-Cj								

Dari tabel di atas terlihat bahwa baris evaluasi Z_j-Cj sudah tidak ada yang negatif, maka program telah optimal. Dapat disimpulkan bahwa $x_1 = 4, x_2 = 5\ dan\ x_3 = 4$ dengan maksimum $z = 995000$.

Contoh:

Suatu perusahaan menghasilkan dua produk, meja dan kursi yang diproses melalui dua bagian fungsi: perakitan dan pemolesan. Pada bagian perakitan tersedia 60 jam kerja, sedangkan pada bagian pemolesannya hanya 48 jam kerja. Untuk menghasilkan 1 meja diperlukan 4 jam kerja perakitan dan 2 jam kerja pemolesan, sedangkan untuk menghasilkan 1 kursi diperlukan 2 jam kerja perakitan dan 4 jam kerja pemolesan. Laba untuk setiap meja dan kursi yang dihasilkan masing-masing 80.000 dan 60.000. berapa jumlah meja dan kursi yang optimal dihasilkan?

Penyelesaian:

Definisi variabel keputusan: Keputusan yang akan diambil adalah berapakah jumlah meja dan kursi yang dihasilkan. X_1= jumlah meja yang akan dihasilkan (dalam satuan unit) X_2 = jumlah kursi yang akan dihasilkan (dalam satuan unit).

Tabel 2.36 Permasalahan Perusahaan Meja dan Kursi

Proses	**Meja**	**Kursi**	**Kapasitas**
Perakitan	4	2	60
Pemolesan	2	4	48
Laba/unit	80000	60000	

Fungsi tujuan

Maksimumkan: $Z = 80000x_1 + 60000x_2$

Kendala:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 60$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 48$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Langkah 1

Ubah sistem pertidaksamaan ke dalam sistem persamaan linear dengan menambahkan variabel tiruan atau disebut *slack*.

Fungsi tujuan

Maksimumkan: $Z = 80000x_1 + 60000x_2$

Sedangkan fungsi kendala (selain kendala non-negatif) diubah menjadi bentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack*, yaitu suatu variabel yang mewakili tingkat pengangguran kapasitas yang merupakan batasan.

Fungsi kendala pada soal tersebut di atas berubah menjadi:

$$4x_1 + 2x_2 + s_1 = 60$$
$$2x_1 + 4x_2 + s_2 = 48$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Langkah 2
Menyusun semua persamaan ke dalam tabel simpleks

Tabel 2.37 Perhitungan Metode *Simplex*

			80000	60000	0	0	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
0	S_1	60	4	2	1	0	
0	S_2	48	2	4	0	1	
0		0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-80000	-60000	0	0	

Tabel 2.38 Perhitungan Metode *Simplex*

			80000	**60000**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
0	S_1	60	4	2	1	0	15
0	S_2	48	2	4	0	1	24
		0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-80000	-60000	0	0	

Tabel 2.39 Perhitungan Metode *Simplex*

			80000	**60000**			
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
80000	X_1	15	1	1/2	1/4	0	30
0	S_2	18	0	3	- 1/2	1	6
		1200000	80000	40000	20000	0	
	Z_j-Cj		0	-20000	20000	0	

Tabel 2.40 Perhitungan Metode *Simplex*

			80000	**60000**			
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	Rasio
80000	X_1	12	1	0	1/3	- 1/6	
60000	X_2	6	0	1	- 1/6	1/3	
		1320000	80000	60000	16666 2/3	6666 2/3	
	Z_j-Cj		0	0	16666 2/3	6666 2/3	

Karena nilai-nilai pada baris Z sudah tidak ada yang negatif, berarti iterasi selesai, dan solusi yang diperoleh adalah: X_1 = Meja = 12, X_2 = Kursi = 6 dan Nilai fungsi tujuan Z (laba) = 1320000. Artinya, untuk memperoleh keuntungan yang maksimal sebesar Rp1.320.000, maka perusahaan sebaiknya memproduksi meja sebanyak 12 unit dan kursi sebanyak 6 unit.

Contoh:
Maks $Z = 30000x_1 + 50000x_2$

Fungsi kendala:

$$2x_1 \leq 8$$
$$3x_2 \leq 15$$
$$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Maks $Z = 30000x_1 + 50000x_2$

Fungsi kendala:

$$2x_1 + s_1 = 8$$
$$3x_2 + s_{2=}15$$
$$6x_1 + 5x_2 + s_3 = 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Menabulasikan persamaan-persamaan fungsi tujuan dan kendala yang telah diubah ke dalam tabel berikut.

Tabel 2.41 Perhitungan Metode *Simplex*

			30000	50000	0	0	0	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	8	2	0	1	0	0	
0	S_2	15	0	3	0	1	0	
0	S_3	30	6	5	0	0	1	
	Z							
	Z_j-Cj							

Tabel 2.42 Perhitungan Metode *Simplex*

			30000	**50000**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	8	2	0	1	0	0	
0	S_2	15	0	3	0	1	0	5
0	S_3	30	6	5	0	0	1	6
	Z	0	0	0	0	0	0	
	Z_j-Cj		-30000	-50000	0	0	0	

B2/3

B3-5*(B3/3)

Tabel 2.43 Perhitungan Metode *Simplex*

			30000	**50000**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	8	2	0	1	0	0	4
50000	X_2	5	0	1	0	1/3	0	
0	S_3	5	6	0	0	-1 2/3	1	5/6
	Z	250000	0	50000	0	16666 2/3	0	
	Z_j-Cj		-30000	0	0	16666 2/3	0	

B1-2*(B3/6)

B3/6

Tabel 2.44 Perhitungan Metode *Simplex*

			30000	**50000**	**0**	**0**	**0**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Rasio
0	S_1	6 1/3	0	0	1	5/9	- 1/3	
50000	X_2	5	0	1	0	1/3	0	
30000	X_1	5/6	1	0	0	- 2/7	1/6	1/7
	Z	275000	30000	50000	0	8333 1/3	5000	
	Z_j-Cj		0	0	0	8333 1/3	5000	

Berdasarkan tabel hasil perbaikan di atas dapat disimpulkan bahwa hasil iterasi ini telah mencapai kondisi optimal, karena nilai pada baris fungsi tujuan Z sudah tidak ada yang negatif. Dapat disimpulkan bahwa $x_1 = 5/6, x_2 = 5$ dengan maksimum $z = 275000$.

Berikut ini langkah-langkah penyelesaian permasalahan program linier fungsi tujuan meminimumkan dengan Metode Simpleks.

1. Mengubah semua kendala ke *Bentuk Kanonik Simpleks* (yang semula menggunakan tanda pertidaksamaan menjadi persamaan) dengan menambah perubah (variabel) *Slack S.* Perubah-perubah slack yang ada dimasukkan (ditambahkan) ke fungsi sasaran dan *diberi koefisien 0.*
2. Apakah dalam matriks A = [aij] (pada fungsi kendala) sudah terbentuk Matriks Identitas (In)?
   a. Apabila dalam matriks A sudah terbentuk Matriks Identitas maka disusun tabel awal simpleks sebagai berikut:

Tabel 2.45 Perhitungan Metode *Simplex* Kasus Meminumumkan Fungsi

[redacted]	X_1	X_2	...Xn	S_1	S_2	V_1	…	bi	Ri
X1	a_{11}	a_{12}	… a_{1n}	1	0	1	…	b1	R_1
.			…		.		…	.	.
Xm	a_{m1}	a_{m2}	… a_{mn}	0	0		…	bm	Rm
Zj	Z_1	Z_2	… Zn						
Zj – Cj	Z_1–C_1	Z_2–C_2	Zn – Cn						

   b. Jika belum terbentuk matriks identitas (In), maka matriks identitas ditimbulkan (dimunculkan) dengan menambah perubah semu dan diberi notasi (V). Perubah semu yang ada dimasukan di fungsi sasaran, sedangkan koefisien dari variabel semu pada fungsi sasaran diberi nilai (+M), dengan M adalah bilangan yang cukup besar. Dilanjutkan ke langkah a.

3. Apakah dalam matriks A = [aij] (pada fungsi kendala) sudah terbentuk Matriks Identitas (In)?
   a. Jika untuk semua Zj - Cj $\leq$ 0 dilanjutkan ke langkah 4,
   b. Jika ada Zj - Cj > 0 (positif), maka dibuat tabel baru dengan cara sebagai berikut:
      1) Menentukan kolom kunci yaitu memilih nilai Zj - Cj yang terbesar yaitu (Max{ Zj-Cj}. Sebut dengan Z_k - C_k maka kolom ke-k disebut kolom kunci.
      2) Pada kolom ke-k dilakukan pemeriksaan terhadap nilai a_{ik}.
         a) Jika untuk semua aik negatif (a_{ik} < 0) maka jawab tidak terbatas (Nilai Fungsi Tujuan tidak Terbatas)/(*Unbounded*)
         b) Jika terdapat aik yang positif hitung nilai Ri, (untuk a_{ik} yang positif saja) kemudian dilanjutkan ke langkah,
      3) Menentukan baris kunci, yaitu dengan memilih nilai Ri yang terkecil (di antara yang positif) Min{Ri}, namakan Rr, maka baris ke-r disebut baris kunci.
      4) Kemudian disusun tabel baru sebagai berikut (dimulai dari baris kunci baru).

4. Jika ada nilai *V*k yang positif maka *soal asli tidak fisibel* (*infeasible solution*).
   a. Jika tidak ada nilai V_k yang positif maka akan diperoleh penyelesaian yang maksimum.
   b. Apakah pada tabel terakhir terdapat nilai V_k yang positip?

Jadi langkah-langkah Metode Simpleks Kasus Meminimumkan hampir sama dengan kasus Maksimum, hanya ada beberapa perbedaan yaitu:

1. Pengubahan bentuk kanonik, koefisien dari peubah (variabel) semu (V) pada fungsi sasaran adalah +M (positif M) di mana M bilangan yang sangat besar.

2. Tabel sudah minimum jika semua nilai dari Zj -Cj ≤0
3. Penentuan kolom kunci berdasarkan nilai dari Zj -Cj yang paling besar yaitu (maks {Zj - Cj })

Contoh:
Fungsi tujuan
Meminimumkan: $Z = 40x_1 + 80x_2$

Kendala:

$$x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Penyelesaian:
Langkah 1

Ubah sistem pertidaksamaan ke dalam system persamaan linear dengan menambahkan variable tiruan atau disebut slack.

Fungsi tujuan
Meminimumkan: $Z = 40x_1 + 80x_2$

Sedangkan fungsi kendala (selain kendala non-negatif) diubah menjadi bentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack*, yaitu suatu variabel yang mewakili tingkat pengangguran kapasitas yang merupakan batasan, dan dengan menambah perubah semu dan diberi notasi (V).

Fungsi kendala pada soal tersebut di atas berubah menjadi:

$$x_1 + x_2 - s_1 + V_1 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 + s_2 + V_2 = 6$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, V_1, V_2 \geq 0$$

Langkah 2
Menyusun semua persamaan ke dalam tabel simpleks.

Tabel 2.46 Perhitungan Metode *Simplex*

			40	**80**	**0**	**0**	**M**	**M**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	V_1	V_2	Rasio
M	V_1	4	1	1	-1	0	1	0	4
M	V_2	6	1	3	0	-1	0	1	2
	Z_j		2M	4M	-M	-M	M	M	
	Z_j-Cj		2M-40	4M-80	-M	-M	M	M	

B1-B2/3
B2/3

Tabel 2.47 Perhitungan Metode *Simplex*

			40	**80**	**0**	**0**	**M**	**M**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	V_1	V_2	Rasio
M	V_1	2	2/3	0	-1	1/3	1	- 1/3	3
40	X_2	2	1/3	1	0	- 1/3	0	1/3	6
	Z_j	2M+40	2/3M+40/3	40	- M	1/3M- 40/3	M	- 1/3M+40/3	
	Z_j-Cj		2/3M-26 2/3	- 40	- M	1/3M- 40/3	0	- 4/3M+40/3	

B1/(2/3)
B2-(1/3)*(B1/(2/3))

Tabel 2.48 Perhitungan Metode *Simplex*

			40	**80**	**0**	**0**	**M**	**M**	
CB	Basis	NK	X_1	X_2	S_1	S_2	V_1	V_2	Rasio
40	X_1	3	1	0	-1 1/2	1/2	1 1/2	- 1/2	
80	X_2	1	0	1	1/2	- 1/2	- 1/2	1/2	
	Z_j	200	40	80	-20	-20	20	20	
	Z_j-Cj		0	0	-20	-20	20-M	20-M	

Karena semua $Zj - Cj \leq 0$, maka tabel sudah minimal, dengan nilai $X_1 = 3$, dan $X_2 = 1$, dan Z minimalnya = 200.

2.6 Latihan.

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1. Suatu perusahaan menghasilkan dua produk, meja dan kursi yang diproses melalui dua bagian fungsi: perakitan dan pemolesan. Pada bagian perakitan tersedia 60 jam kerja, sedangkan pada bagian pemolesan hanya 48 jam kerja. Untuk menghasilkan 1 meja diperlukan 4 jam kerja perakitan dan 2 jam kerja pemolesan, sedangkan untuk menghasilkan 1 kursi diperlukan 2 jam kerja perakitan dan 4 jam kerja pemolesan. Laba untuk setiap meja dan kursi yang dihasilkan masing-masing Rp80.000 dan Rp60.000,- Berapa jumlah meja dan kursi yang optimal dihasilkan?
2. Sebuah garmen membuat 3 macam produk yaitu kursi, meja dan lemari. Produk-produk tsb membutuhkan 3 jenis bahan yaitu kayu papan, kayu ring dan paku. Spesifikasi produk:
   a. 1 kursi membutuhkan 2 kayu papan, 6 ring dan 10 paku
   b. 1 meja membutuhkan 2 kayu papan, 6 ring dan 12 paku
   c. 1 lemari membutuhkan 10 kayu papan, 10 ring dan 20 paku

   Permasalahannya adalah berapa kursi, meja dan lemari yang dapat diproduksi jika tersedia 108 kayu papan, 204 kayu ring dan 376 paku?
3. Pak Muhammad memiliki dua hektare sawah yang ditanami padi dan sudah saatnya diberi pupuk. Terdapat tiga jenis pupuk (Urea, SS, TSP) yang harus digunakan agar hasil panen padi lebih maksimal. Harga per karung setiap jenis pupuk adalah Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00. Banyak pupuk yang dibutuhkan Pak Muhammad sebanyak 40 karung. Pemakaian pupuk Urea 2 kali banyaknya dari pupuk SS. Sementara dana yang disediakan Pak Muhammad untuk membeli pupuk adalah Rp4.020.000,00. Berapa karung untuk setiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Muhammad?

4. $Z = 3x_1 + 5x_2$; memaksimumkan

Kendala:

$2x_1 + 4x_2 \leq 10$

$2x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

5. $Z = 5x_1 + 3x_2$; memaksimumkan

Kendala:

$3x_1 + 5x_2 \leq 15$

$5x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

6. $Z = 4000x_1 + 1000x_2$; memaksimumkan

Kendala:

$10x_1 + 2x_2 \leq 300$

$3x_1 + 2x_2 \leq 120$

$2x_1 + 2x_2 \leq 100$

$x_1, x_2 \geq 0$

DAFTAR PUSTAKA.

Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2010. *Elementary Linear Algebra. Aplications Version*. Tenth Edition. UK: Jhon Wiley & Son.

Dumairy. 2004. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Cetakan ke-12. Yogyakarta: BPFE.

Huwaida, Hikmayanti. 2017. *Matematika.* Banjarmasin: Penerbit PT Grafika Wangi Kalimantan.

Huwaida, Hikmayanti. 2019. *Matematika Bisnis.* Banjarmasin: Penerbit Poliban Press.

Nababan, M. 2005. *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

R., Wahyu Hidayat dan Jihadi, M. 2016. *Matematika Ekonomi*. Malang: Penerbit Universitas Muhamadiyah Malang.

Rahmi dan Suryani, Mulia. 2016. *Buku Ajar Program Linier*. Yogyakarta: Deepublish.

Riwayati, Hedwigis Esti dan Markonah. 2008. *Matematika Ek. dan Bisnis 1*. Jakarta: Penerbit PT Grasindo.

Wijayanti, Indah Emilia., Wahyuni, Sri., dan Susanti, Yeni. 2018. *Dasar-Dasar Aljabar Linear dan Penggunaannya dalam Berbagai Bidang*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

GLOSARIUM

Adjoint	Matriks *adjoint* itu adalah *transpose* dari matriks kofaktor.
Determinan	Determinan adalah suatu bilangan real yang diperoleh dari suatu proses dengan aturan tertentu terhadap matriks bujur sangkar.
Kaidah Cramer	Kaidah Cramer adalah rumus yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Metode ini menggunakan determinan suatu matriks dan matriks lain yang diperoleh dengan mengganti salah satu kolom dengan vektor yang terdiri dari angka di sebelah kanan persamaannya.
Metode Eliminasi	Metode eliminasi adalah metode yang dilakukan cara mengeliminasi salah satu variabel sehingga tersisa variabel lainnya untuk selanjutnya dicari nilai yang memenuhi.
Metode Grafik	Metode Grafik merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk memecahkan permasalahan linier *programming*. Metode ini menggunakan pendekatan grafik dalam pengambilan keputusannya, di mana seluruh fungsi kendala dibuat dalam satu bagian gambar kemudian diambil keputusan yang optimum.
Metode Simpleks	Metode simpleks adalah suatu metode yang secara sistematis penyelesaian pemrograman linear dimulai dari suatu penyelesaian basis yang fisibel ke penyelesaian dasar fisibel lainnya, yang dilakukan berulang-ulang

	(iteratif) sehingga tercapai suatu penyelesaian optimum
Metode Substitusi.	Metode substitusi merupakan suatu metode yang digunakan untuk menentukan himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear dua variabel dengan cara mengganti (menyubstitusi) salah satu variabelnya.
Operasi Baris Elementer	Operasi Baris Elementer (OBE) adalah salah satu alternatif dalam menyelesaikan suatu bentuk matriks seperti menentukan invers matriks dan penerapan matriks pada sistem persamaan linear menggunakan dua cara yaitu “Eliminasi Gauss” dan “Eliminasi Gauss-Jordan”.
Persamaan Linear	adalah sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal.
Program Linear	Program linear adalah suatu metode penentuan nilai optimum dari suatu persoalan linear. Nilai optimum (maksimal atau minimum) diperoleh dari nilai dalam suatu himpunan penyelesaian persoalan linear.

INDEKS

PROFIL PENULIS

Hikmayanti Huwaida dilahirkan di Banjarmasin pada tanggal 24 Agustus 1970. Anak kedua dari lima bersaudara dari pasangan Bapak H. Husni Thamrin dan Ibu Hj. Lismiaty. Menikah pada tanggal 14 November 1999 dengan (Alm.) Noor Ifansyah, putra pasangan (Alm.) H. Abdullah Hasan dan (Alm.) Hj. Salmah dan memiliki satu anak bernama Muhammad Taufiqurrahman. Riwayat pendidikan dimulai di SD Negeri Mulawarman lulus tahun 1983, SMP Negeri 2 lulus tahun 1986, dan SMA Negeri 1 lulus tahun 1989. Berkuliah di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Diponegoro lulus tahun 1996 dan selanjutnya lulus di Program Magister Manajemen Pendidikan, Program Pascasarjana Universitas Lambung Mangkurat tahun 2011. Saat ini, penulis bekerja sebagai dosen di Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin. Mata kuliah yang diampu terdiri atas Statistika Bisnis, Matematika Keuangan, Statistika Deskriptif, Kalkulus I, Statistika Probabilitas, Kalkulus II, Aljabar Linier, Teknik Riset Operasional, Matematika I, dan Matematika II. Buku ajar yang diterbitkan tahun 2017 berjudul *Matematika* dan di tahun 2019 berjudul *Statistika Deskriptif dan Matematika Bisnis*.

PROGRAM LINIER

HIKMAYANTI HUWAIDA

Model program linear dapat memiliki pembatas-pembatas linear yang bertanda (≤, =, dan ≥), dan peubah-peubah keputusannya dapat merupakan peubah nonnegatif, dapat pula peubah yang tidak terbatas dalam tanda (*unrestricted in sign*). Tujuan pembuatan model ini adalah untuk memudahkan dan menganalisis perilaku sistem nyata dalam rangka memperbaiki kinerjanya. Kompleksitas sistem nyata yang terdiri dari banyak variabel menyulitkan si pengambil keputusan untuk membuat model. Biasanya didalam suatu sistem nyata terdapat beberapa variabel yang dominan. Oleh karena itu, representasi dari sistem nyata hanya akan mempertimbangkan elemen atau variabel yang mendominasi sistem nyata tersebut. Dalam model program linear, dikenal dua macam fungsi yaitu: fungsi tujuan *(objective function)* dan fungsi-fungsi batasan *(constraint function)*. Fungsi tujuan adalah fungsi yang menggambarkan tujuan atau sasaran yang berkaitan dengan pengaturan secara optimal sumber daya untuk memperoleh keuntungan maksimal atau biaya minimal. Sedangkan fungsi batasan merupakan bentuk penyajian secara matematis batasan-batasan kapasitas yang tersedia yang akan dialokasikan secara optimal ke berbagai kegiatan.

Cakupan materi yang dipelajari dalam buku ini meliputi:

- Persamaan Linear
- Sistem Persamaan Linier Dua Variabel dan Tiga Variabel
- Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Menggunakan Metode Grafik, Metode Eliminasi, Metode Subtitusi, Kaidah Cramer, Operasi Baris Elementer, Determinan dan Adjoint.
- Program Linear
- Formulasi Model Program Linear Kasus Memaksimum Fungsi Tujuan
- Formulasi Model Program Linear Kasus Meminimumkan Fungsi Tujuan
- Penyelesaian Program Linear Menggunakan Metode Grafik
- Penyelesaian Program Linear Metode Simpleks

Penerbit Poliban Press
Redaksi :
Politeknik Negeri Banjarmasin, Jl. Brigjen H. Hasan Basry, Pangeran, Komp. Kampus ULM, Banjarmasin Utara
Telp : [illegible]
Email : press@poliban.ac.id

9 786237 694397