HIKMAYANTI HUWAIDA

MATEMATIKA BISNIS

Diterbitkan Atas Kerjasama
Deepublish dengan Politeknik Banjarmasin

MATEMATIKA BISNIS

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

i. penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv. penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

MATEMATIKA BISNIS

Hikmayanti Huwaida

POLIBAN PRESS

MATEMATIKA BISNIS

Penulis :
Hikmayanti Huwaida

e-ISBN :
978-623-92412-0-9

Editor dan Penyunting :
Adi Pratomo

Desain Sampul dan Tata Letak :
Eko Sabar Prihatin; Rahma Indera

Penerbit :
POLIBAN PRESS
Anggota APPTI (Asosiasi Penerbit Perguruan Tinggi Indonesia)
no.004.098.1.06.2019

Cetakan Pertama, 2019

Redaksi :
Politeknik Negeri Banjarmasin, Jl. Brigjen H. Hasan Basry,
Pangeran, Komp. Kampus ULM, Banjarmasin Utara
Telp : (0511)3305052
Email : press@poliban.ac.id

Dicetak oleh :
PERCETAKAN DEEPUBLISH
Jl.Rajawali, G. Elang 6, No 3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman
Jl.Kaliurang Km.9,3 – Yogyakarta 55581
Telp/Faks: (0274) 4533427
Website: www.deepublish.co.id
www.penerbitdeepublish.com
E-mail: cs@deepublish.co.id

Katalog Dalam Terbitan (KDT)
Hikmayanti Huwaida—Cet. **1**. — **Matematika Bisnis.** Banjarmasin : Poliban Press, November 2019.

x; 104 hlm.; **15.5x23** cm

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada Poliban Press karena telah mempercayakan proses percetakan buku *Matematika Bisnis* kepada Penerbit Deepublish. Semoga buku ini dapat memberikan manfaat kepada seluruh pembaca dan kerja sama ini dapat terus terjalin.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunianya sehingga Buku Matematika Bisnis tahun 2019 telah dapat diselesaikan. Buku ini merupakan pengantar bagi mahasiswa Program Studi Administrasi Bisnis di Politeknik.

Terimakasih disampaikan kepada Joni Riadi S.ST., M.T. selaku Direktur Politeknik Negeri Banjarmasin dan Nurmahaludin, S.T., M.T. selaku Ketua Pusat Penelitian dan Pengabdian Masyarakat beserta sekretaris dan staf. Terimakasih juga disampaikan kepada Faris Ade Irawan, Reza Fauzan, Eko Sabar Prihatin dan Rahma Indera yang telah berkontribusi dalam editing serta seluruh tim Poliban Press dan semua pihak yang telah ikut membantu dalam penyelesaian buku ini.

Kami menyadari masih terdapat kekurangan dalam buku ini untuk itu kritik dan saran terhadap penyempurnaan buku ini sangat diharapkan. Semoga buku ini dapat memberi manfaat bagi mahasiswa Politeknik khususnya dan bagi semua pihak yang membutuhkan.

Banjarmasin, Agustus 2019

Ketua Poliban Press

PRAKATA

Puji Syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ajar “MATEMATIKA BISNIS”.

Buku ajar “MATEMATIKA BISNIS” dimaksudkan sebagai bahan untuk dijadikan sebagai acuan umum untuk mata kuliah “MATEMATIKA BISNIS” bagi mahasiswa Program Studi Administrasi Bisnis Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin.

Dengan selesainya buku Ajar ini, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar–besarnya kepada:

1. Bapak Joni Riadi, S.ST., M.T., selaku Direktur Politeknik Negeri Banjarmasin.
2. Padli S.Sos., M.M., selaku Ketua Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin.
3. Rekan–rekan Staf Pengajar Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin.

Akhirnya penulis berharap semoga buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa pada khususnya dan bagi pembaca pada umumnya, amien.

Banjarmasin, Agustus 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

OPERASI DASAR ALJABAR

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami:

1.1 Himpunan
1.2 Sistem Bilangan
1.3 Hubungan Perbandingan Antar Bilangan
1.4 Pangkat dan Akar.

1.1 Himpunan

Teori himpunan bersifat sangat mendasar dalam matematika. Teori himpunan melandasi hampir semua cabang ilmu hitung moderen. Di dalam kehidupan sehari– hari, tanpa disadari manusia sudah sering menerapkan konsepsi himpunan.

1. Pengertian Himpunan

Himpunan adalah suatu kumpulan atau gugusan dari sejumlah obyek. Obyek–obyek yang mengisi atau membentuk suatu himpunan disebut anggota, atau elemen, atau unsur. Obyek–obyek suatu himpunan sangat bervariasi; bisa berupa orang–orang tertentu, tanam–tanaman tertentu, benda–benda tertentu, dan sebagainya. Dalam penyajian secara umum himpunan dilambangkan dengan huruf–huruf besar seperti ***A, B, C, D, P, Q, R, X, Y,*** atau ***Z***. Sedangkan obyek–obyek yang menjadi anggota suatu himpunan dilambangkan dengan huruf–huruf kecil *a****, b, c, d, p, q, r, x, y,*** atau ***z*** (R dan Jihadi, 2016).

Notasi:

$p \in A$ berarti bahwa obyek *p* adalah merupakan anggota (atau unsur, atau elemen) dari himpunan *A*.

$A \subset B$ berarti bahwa *A* merupakan himpunan– himpunan dari *B*.
Jika *setiap* himpunan *A* juga merupakan anggota himpunan *B*, dengan kata lain $p \in A$ juga $p \in B$, maka **A disebut himpunan bagian dari B**.

$A = B$ berarti bahwa himpunan *A* sama dengan himpunan *B*, yakni jika dan hanya jika $A \subset B$ serta $B \subset A$.

Dua buah himpunan dikatakan sama atau sederajat apabila semua anggota dari himpunan yang satu juga merupakan anggota– anggota bagi himpunan yang lain, dengan perkataan lain jumlah dan jenis anggota–anggota kedua himpunan tersebut sama.

$p \notin A$ berarti obyek *p* bukan merupakan anggota dari himpunan *A*.

$A \not\subset B$ berarti *A* bukan merupakan himpunan bagian dari *B*.

$A \neq B$ berarti himpunan *A* tidak sama dengan himpunan *B*.

2. Penyajian Himpunan

Penyajian himpunan dapat dituliskan dengan dua macam cara, ***cara daftar*** dan ***cara kaidah***. ***Cara daftar*** adalah dengan mencantumkan seluruh obyek yang menjadi anggota suatu himpunan.

Contoh:
$A = \{1,2,3,4,5\}$

Berarti himpunan *A* beranggotakan bilangan–bilangan bulat positif 1,2,3,4,5.

Adapun ***cara kaidah*** adalah dengan menyebutkan karakteristik tertentu dari Obyek–obyek yang menjadi anggota himpunan tersebut.

Contoh:
$A = \{x; 0 < x < 6\}$

Berarti himpunan *A* beranggotakan obyek *x*, dimana *x* adalah bilangan–bilangan bulat positif yang lebih besar dari nol tetapi lebih kecil dari 6.

Untuk himpunan di atas, penyajiannya secara kaidah dapat pula dituliskan sebagai berikut:

$$A = \{x; 0 \le x \le 6\}$$

Berarti himpunan *A* beranggotakan obyek *x*, yang harganya paling sedikit sama dengan satu dan paling banyak sama dengan lima.

3. Himpunan Universal dan Himpunan Kosong

Setiap himpunan tertentu dianggap terdiri dari beberapa himpunan bagian yang masing– masing mempunyai anggota. Himpunan "besar" tadi dinamakan himpunan universal, atau sering disebut dengan himpunan saja, dan dalam penulisannya dilambangkan dengan notasi *U*. Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai satu anggota pun, biasanya dinotasikan dengan $\{\ \}$ atau ϕ. Secara teoritik, himpunan kosong adalah merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan apapun.

Berdasarkan adanya konsep himpunan universal yang merupakan induk semua himpunan, dan himpunan kosong yang merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan, maka terhadap setiap himpunan tertentu (misalkan *A*) berlaku ketentuan: $\phi \subset A \subset U$.

<u>Contoh:</u>
Misalkan
$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$A = \{0,1,2,3,4\}$
$B = \{5,6,7,8,9\}$
$C = \{0,1,2,3,4\}$

Kesimpulan yang bisa ditarik berkenaan dengan data di atas adalah:
$x \in U$ dimana $0 \leq x \leq 9$
$y \in A$ dimana $0 \leq y \leq 4$
$z \in B$ dimana $5 \leq z \leq 9$
$y \in C$ dimana $0 \leq y \leq 4$
$A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset U$, $A = C$, $A \neq B$ dan $B \neq C$
$y \in A$ dan juga $y \in C$, maka $A \subset C$ dan $C \subset A$
$y \notin B$, dan di pihak lain $z \notin A$ serta $z \notin C$
$\phi \subset A$, $\phi \subset B$, $\phi \subset C$, dan $\phi \subset U$
$\phi \subset A \subset U$, $\phi \subset B \subset U$, dan $\phi \subset C \subset U$

4. Operasi Himpunan

a. Gabungan (Union)

Gabungan (union) dari himpunan *A* dan himpunan *B*, ditulis dengan notasi $A \bigcup B$, adalah himpunan yang beranggotakan Obyek–obyek milik *A* atau Obyek–obyek milik *B*.

$$A \bigcup B = \{x; x \in A \quad \text{atau} \quad x \in B\}$$

b. Irisan (*Intersection*)

Irisan (*Intersection*) dari himpunan *A* dan himpunan *B*, ditulis dengan notasi $A \cap B$, adalah himpunan yang beranggotakan obyek–obyek milik *A* maupun obyek–obyek milik *B;* dengan perkataan lain, beranggotakan obyek–obyek yang dimiliki *A* dan *B* secara bersama.

$$A \cap B = \{x; x \in A \quad \text{dan} \quad x \in B\}$$

Dalam hal $A \cap B = \phi$, yakni jika *A* dan *B* tidak mempunyai satupun anggota yang dimiliki bersama, maka *A* dan *B* dikatakan *disjoin.*

c. Selisih

Selisih dari himpunan *A* dan himpunan *B*, ditulis dengan notasi $A - B$ atau $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$, adalah himpunan yang beranggotakan obyek–obyek milik *A* yang bukan obyek–obyek milik *B*.

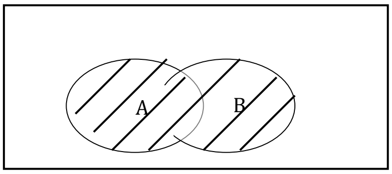
$$A - B \equiv A \setminus B = \{x; x \in A \quad \text{tetapi} \quad x \notin B\}$$

d. Pelengkap (*Complement*)

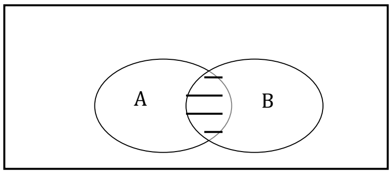
Pelengkap (*complement*) dari sebuah himpunan *A* ditulis dengan notasi $\overline{A}$, A^{C} adalah himpunan yang beranggotakan obyek–obyek yang tidak dimiliki *A;* dengan perkataan lain, $\overline{A}$ adalah sama dengan selisih antara himpunan universal *U* dan himpunan *A*.

$$\overline{A} = \{x; x \in U \quad \text{tetapi} \quad x \notin A\} = U - A$$

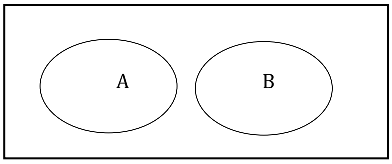
Aturan main dalam pengoperasian himpunan ini akan lebih mudah dipahami dengan *diagram Venn* sebagaimana digambarkan berikut ini:



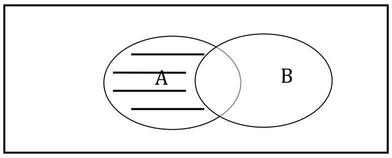
$A \cup B$



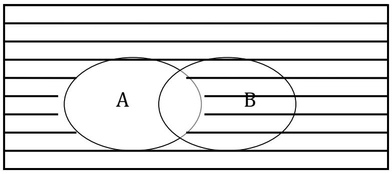
$A \cap B$



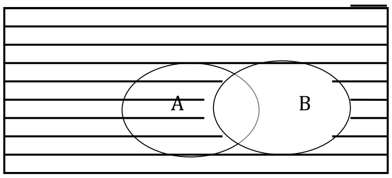
$A \cap B = \phi$



$A - B$



$\overline{A}$



$\overline{B}$

Berikut ini akan diberikan contoh pengoperasian himpunan
Misal:

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$P = \{1,2,3,4,5\}$

$Q = \{4,5,6,7,8\}$

$R = \{6,7,8,9\}$

Maka:

$P \cup Q = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$P \cup R = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = U$

$Q \cup R = \{4,5,6,7,8,9\}$

$P \cap Q = \{4,5\}$

$P \cap R = \phi$

$Q \cap R = \{6,7,8\}$

$P - Q = \{1,2,3\}$

$P - R = \{1,2,3,4,5\}$

$Q - R = \{4,5\}$

$\overline{P} = \{6,7,8,9\} = U - P$

$\overline{Q} = \{1,2,3,9\} = U - Q$

$\overline{R} = \{1,2,3,4,5\} = U - R$

5. Kaidah–Kaidah Matematika dalam Pengoperasian Himpunan

Dalam pengoperasian lebih lanjut teori himpunan, berlaku beberapa kaidah matematika berikut ini

a. Kaidah Idempoten

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

b. Kaidah Asosiatif

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c. Kaidah Komutatif

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

d. Kaidah Distributif.

$$AU(B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

e. Kaidah Identitas.

$$A \cup \varphi = A$$
$$A \cap \varphi = \phi$$
$$A \cup U = U$$
$$A \cap U = A$$

f. Kaidah Kelengkapan.

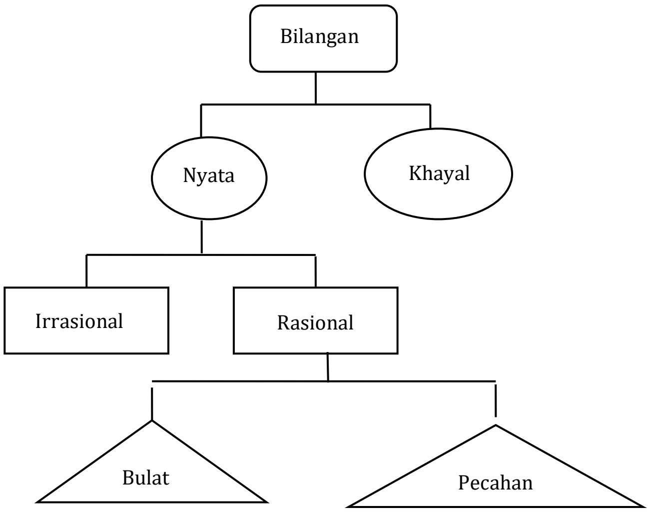
$$A \cup \overline{A} = U$$
$$A \cap \overline{A} = \phi$$
$$\left(\overline{\overline{A}}\right) = A$$
$$\overline{U} = \phi$$
$$\overline{\phi} = U$$

g. Kaidah De Morgan.

$$\left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\left(\overline{A \cap B}\right) = \overline{A} \cup \overline{B}$$

1.2 Sistem Bilangan

Dalam matematika, bilangan–bilangan yang ada dapat digolongkan sebagaimana urian pembagian jenis bilangan berikut ini:



Bilangan nyata dapat positif maupun negatif. ***Bilangan khayal*** adalah bilangan yang berupa akar pangkat genap dari suatu bilangan negatif. Perbedaan antara kedua jenis bilangan ini adalah bahwa bilangan nyata mengandung salah satu "sifat" secara tegas yaitu: positif atau negatif, dan tidak kedua– keduanya. Sedangkan bilangan khayal tidak jelas sifatnya, apakah positif ataukah negatif. Bilangan khayal yang mengandung kedua sifat positif dan negatif sekaligus, disebut ***bilangan kompleks.***

Contoh bilangan nyata : 2; -2; 1,1 ;-1,1

Contoh bilangan khayal : $\sqrt{(-4)}$; $\sqrt[4]{(-1{,}4641)}$

Pada dasarnya setiap bilangan, positif atau negatif, jika berpangkat genap akan selalu menghasilkan bilangan positif. Dengan demikian sukar sekali dibayangkan bagaimana hasil akhir dari suatu bilangan negatif yang berada di bawah tanda akar positif genap. Oleh karena itu bilangan seperti itu dinamakan bilangan khayal.

Bilangan Rasional adalah hasil bagi antara dua bilangan, yang berupa bilangan bulat; atau berupa pecahan dengan desimal terbatas, atau desimal berulang. Sedangkan ***bilangan Irrasional*** adalah hasil bagi antara dua bilangan, berupa pecahan dengan desimal tak terbatas dan tak berulang, termasuk π dan bilangan e. ***Bilangan bulat*** adalah hasil bagi antara dua bilangan yang hasilnya bulat, termasuk nol (0). ***Bilangan pecahan*** adalah hasil bagi antara dua bilangan yang hasilnya pecahan dengan desimal terbatas atau desimal berulang.

Berdasarkan pembatasan di atas, maka yang membedakan apakah sesuatu bilangan tergolong bilangan rasional ataukah bilangan irrasional adalah faktor 'keterbatasan' dan 'keberulangan' desimalnya. Adapun perbedaan antara bilangan bulat dengan pecahan (keduanya tergolong bilangan rasional) adalah dari hasil baginya apakah bulat atau pecahan.

0,151515151…	tergolong bilangan rasional.
0,151515151234511…	tergolong bilangan irrasional
0,151242424…	tergolong bilangan rasional.

1.3 Hubungan Perbandingan Antar Bilangan

Bagaimana bilangan–bilangan saling berhubungan satu sama lain secara relatif. Tanda– tanda ketidaksamaan yang menyatakan hubungan perbandingan tersebut terdiri dari:

Tanda $<$ melambangkan "lebih kecil dari"
Tanda $>$ melambangkan "lebih besar dari"
Tanda $\leq$ melambangkan "lebih kecil dari atau sama dengan"
Tanda $\geq$ melambangkan "lebih besar dari atau sama dengan"

Bilangan–bilangan nyata mempunyai sifat– sifat hubungan perbandingan sebagai berikut:

a. Jika $a \leq b$, maka $-a \geq -b$
   Sedangkan jika $a \geq b$ maka $-a \leq -b$
b. Jika $a \leq b$ dan $x \geq 0$, maka $x.a \leq x.b$
   Sedangkan jika $a \geq b$ dan $x \geq 0$ maka $x.a \geq x.b$
c. Jika $a \leq b$ dan $x \leq 0$, maka $x.a \geq x.b$
   Sedangkan jika $a \geq b$ dan $x \leq 0$ maka $x.a \leq x.b$

d. Jika $a \le b$ dan $c \le d$, maka $a + c \ge b + d$
Sedangkan jika $a \ge b$ dan $c \ge d$, maka .$a + c \le b + d$

a. Operasi Bilangan

Bilangan–bilangan nyata memenuhi kaidah– kaidah tertentu apabila mereka dioperasikan. Operasi penjumlahan dan perkalian bilangan–bilangan nyata memenuhi kaidah– kaidah sebagai berikut:

i. Kaidah Komutatif.

Dalam menjumlah dua bilangan *a* dan *b*, perubahan urutan antara keduanya tidak akan mengubah hasil penjumlahan.

$$a + b = b + a$$
$$4 + 6 = 6 + 4$$

Hal yang sama juga berlaku untuk perkalian, perubahan urutan perkalian antara keduanya tidak akan mengubah hasilnya.

ii. Kaidah Asosiatif.

Dalam menjumlah tiga bilangan *a, b* dan *c*, atau lebih perubahan cara pengelompokan bilangan–bilangan tersebut tidak akan mengubah hasil penjumlahan.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(4 + 6) + 5 = 4 + (6 + 5)$$

Hal yang sama juga berlaku untuk perkalian, perubahan cara pengelompokan bilangan–bilangan tersebut tidak akan mengubah hasil perkalian.

iii. Kaidah Pembatalan.

Jika jumlah *a* dan *c* sama dengan jumlah *b* dan *c*, maka *a* sama dengan *b;* dengan perkataan lain:

Jika $a + c = b + c$
maka $a = b$

Jika hasil kali *a* dan *c* sama dengan hasil kali *b* dan *c*, dimana *c* adalah bilangan nyata bukan– nol, maka *a* sama dengan *b;* Jadi:

$$\text{Jika} \quad a.c = b.c \quad (c \neq 0)$$
$$\text{maka} \quad a = b$$

iv. Kaidah Distributif.

Dalam pengalian bilangan *a* terhadap jumlah (*b*+*c*), hasil kalinya adalah sama dengan jumlah hasil kali *ab* dan hasil kali *ac*. Dengan perkataan lain, hasil kali sebuah bilangan terhadap suatu penjumlahan adalah sama dengan jumlah hasil kali–hasil kalinya.

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$4.(6 + 5) = (4 \times 6) + (4 \times 5)$$

v. Kaidah Penyama.

Unsur penyama dalam penjumlahan (pengurangan) adalah bilangan nol, sebab jumlah (selisih) antara suatu bilangan tertentu dan 0 adalah bilangan itu sendiri.

$$a \pm 0 = a$$
$$5 \pm 0 = 5$$

Unsur penyama dalam perkalian (pembagian) adalah bilangan satu, sebab hasil kali (hasil bagi) antara suatu bilangan tertentu dan 1 adalah bilangan itu sendiri.

$$a \times 1 = a \qquad a : 1 = a$$
$$5 \times 1 = 5 \qquad 5 : 1 = 5$$

vi. Kebalikan.

Setiap bilangan nyata mempunyai sebuah balikan penambah (*additive inverse*); jumlah antara bilangan tertentu dan balikan penambahnya adalah sama dengan nol.

$$a + (-a) = 0$$
$$5 + (-5) = 0$$

Setiap bilangan nyata bukan nol mempunyai sebuah balikan pengali (*multiplicative inverse*); hasil kali antara bilangan tertentu terhadap balikan pengalinya adalah sama dengan satu.

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$
$$5 \times \frac{1}{5} = 1$$

b. Operasi Tanda

Berikut ini akan dibahas bagaimana pengoperasian bilangan–bilangan tersebut berkenaan dengan tanda– tanda yang melekat padanya.

i. Operasi Penjumlahan.

1) Jumlah dari dua bilangan positif $(+a)$ dan $(+b)$ adalah sebuah bilangan positif baru $(+c)$ yang nilainya lebih besar.

$$(+a) + (+b) = (+c)$$
$$(+4) + (+6) = (+10)$$

2) Jumlah dari dua bilangan negatif $(-a)$ dan $(-b)$ adalah sebuah bilangan negatif baru $(-c)$ yang nilainya lebih kecil.

$$(-a) + (-b) = (-c)$$
$$(-4) + (-6) = (-10)$$

3) Jumlah dari bilangan positif $(+a)$ dan negatif $(-b)$ adalah bilangan positif $(+c)$ jika harga mutlak *a* lebih besar dari harga mutlak *b,* atau bilangan negatif $(-d)$ jika harga mutlak *a* lebih kecil dari harga mutlak *b.*

$$(+a)+(-b)=(+c) \quad \text{jika} \quad |a|>|b|$$
$$(+5)+(-2)=(+3)$$
atau
$$(+a)+(-b)=(-d) \quad \text{jika} \quad |a|<|b|$$
$$(+2)+(-5)=(-3)$$

4) Jumlah dari bilangan negatif $(-a)$ dan positif $(+b)$ adalah bilangan positif $(+c)$ jika harga mutlak *a* lebih kecil dari harga mutlak *b,* atau bilangan negatif $(-d)$ jika harga mutlak *a* lebih besar dari harga mutlak *b.*

$$(-a)+(+b)=(+c) \quad \text{jika} \quad |a|<|b|$$
$$(-5)+(+8)=(+3)$$
atau
$$(-a)+(+b)=(-d) \quad \text{jika} \quad |a|>|b|$$
$$(-8)+(+5)=(-3)$$

ii. Operasi Pengurangan.

1) Selisih dari dua bilangan positif $(+a)$ dan $(+b)$ adalah sebuah bilangan positif baru $(+c)$ jika harga mutlak *a* lebih besar dari harga mutlak *b,* atau bilangan negatif $(-d)$ jika harga mutlak *a* lebih kecil dari harga mutlak *b.*

$$(+a)-(+b)=(+c) \quad \text{jika} \quad |a|>|b|$$
$$(+10)-(+6)=(+4)$$
atau
$$(+a)-(+b)=(-d) \quad \text{jika} \quad |a|<|b|$$
$$(+4)-(+6)=(-2)$$

2) Selisih dari dua bilangan negatif $(-a)$ dan $(-b)$ adalah sebuah bilangan negatif baru $(+c)$ jika harga mutlak *a* lebih kecil dari harga mutlak *b*, atau bilangan negatif $(-d)$ jika harga mutlak *a* lebih besar dari harga mutlak *b*.

$$(-a)-(-b)=(+c) \quad \text{jika} \quad |a|<|b|$$
$$(-2)-(-6)=(+4)$$
atau
$$(-a)-(-b)=(-d) \quad \text{jika} \quad |a|>|b|$$
$$(-10)-(-6)=(-4)$$

3) Selisih dari bilangan positif $(+a)$ dan negatif $(-b)$ adalah bilangan positif $(+c)$; hal ini identik dengan penjumlahan dua bilangan positif.

$$(+a)-(-b)=(+c)$$
$$(+5)-(-2)=(+7)$$

4) Selisih dari bilangan negatif $(-a)$ dan positif $(+b)$ adalah bilangan negatif $(-c)$; hal ini identik dengan penjumlahan dua bilangan negatif.

$$(-a)-(+b)=(-c)$$
$$(-5)-(+8)=(-13)$$

iii. Operasi Perkalian.

1) Hasil kali dari dua bilangan positif $(+a)$ dan $(+b)$, serta antara dua bilangan negatif $(-a)$ dan $(-b)$, adalah sebuah bilangan positif baru $(+c)$.

$$(+a)\times(+b)=(+c) \qquad (-a)\times(-b)=(+c)$$
$$(+4)\times(+6)=(+24) \qquad (-4)\times(-6)=(+24)$$

2) Hasil kali dari dua bilangan yang berlainan tanda $(+a)$ dan $(-b)$, atau $(-a)$ dan $(+b)$, adalah sebuah bilangan negatif baru $(-c)$.

$(+a)\times(-b)=(-c)$ $\quad$ $(-a)\times(+b)=(-c)$

$(+5)\times(-2)=(-10)$ $\quad$ $(-5)\times(+2)=(-10)$

iv. Operasi Pembagian.

1) Hasil bagi dari dua bilangan positif $(+a)$ dan $(+b)$, serta antara dua bilangan negatif $(-a)$ dan $(-b)$, adalah sebuah bilangan positif baru $(+c)$.

$(+a)\div(+b)=(+c)$ $\quad$ $(-a)\div(-b)=(+c)$

$(+8)\times(+4)=(+2)$ $\quad$ $(-8)\div(-4)=(+2)$

2) Hasil bagi dari dua bilangan yang berlainan tanda $(+a)$ dan $(-b)$, atau $(-a)$ dan $(+b)$, adalah sebuah bilangan negatif baru $(-c)$.

$(+a)\div(-b)=(-c)$ $\quad$ $(-a)\div(+b)=(-c)$

$(+8)\times(-2)=(-4)$ $\quad$ $(-8)\div(+2)=(-4)$

c. Operasi Bilangan Pecahan

Dalam suatu pecahan biasa terdapat dua macam suku, yaitu suku terbagi (numerator) dan suku pembagi (denominator). Suku terbagi terletak di atas garis bagi, sedangkan suku pembagi terletak di bawahnya.

Berdasarkan nilai– nilai (harga mutlak) dari suku–sukunya, pecahan biasa dibedakan menjadi tiga macam yaitu *pecahan layak, pecahan tak-layak, pecahan kompleks. Pecahan layak* ialah pecahan yang harga mutlak suku terbaginya lebih kecil dari suku pembaginya. Apabila pecahan layak ini didesimalkan, angka di depan tanda koma akan selalu berupa angka nol. Contoh: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$.

Sedangkan *pecahan tak layak* ialah pecahan yang harga mutlak suku terbaginya sama atau lebih besar dari suku pembaginya. Apabila pecahan layak ini didesimalkan, angka di depan tanda koma akan selalu berupa angka bukan– nol. Contoh: $\frac{3}{3}, \frac{12}{3}, -\frac{9}{3}$.

Adapun *pecahan kompleks* ialah pecahan yang pada salah satu atau kedua– dua sukunya terdapat satu pecahan atau lebih. Jadi jika pada suku terbagi (atau pada suku pembagi, atau bahkan pada kedua suku tersebut) masih terdapat lagi satu atau beberapa pecahan, maka pecahan demikian dinamakan pecahan kompleks. Contoh:

Berikut ini akan dijelaskan prinsip– prinsip pengoperasian pecahan biasa:

i. Operasi Pemadanan

Suku–suku dalam sebuah pecahan dapat diperbesar atau diperkecil tanpa mengubah nilai pecahannya, sepanjang keduanya (suku terbagi dan suku pembagi) dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama. Secara umum:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$$

Contoh memperbesar pecahan:

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}; \frac{6}{9} = \frac{6 \times 5}{9 \times 5} = \frac{30}{45}; \frac{30}{45} = \frac{30 \times c}{45 \times c}$ adalah sepadan.

Pecahan– pecahan $\frac{2}{3}, \frac{6}{9}, \frac{30}{45}, \frac{30 \times c}{45 \times c}$ adalah sepadan.

Pembesaran padanan $\frac{2}{3}$ dapat dilakukan secara tak terbatas.

ii. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

Dua buah pecahan atau lebih hanya dapat ditambahkan dan dikurangkan apabila mereka memiliki suku–suku pembagi yang sama atau sejenis. Berarti jika suku–suku pembaginya belum sama, terlebih dahulu harus disamakan sebelum pecahan– pecahan tersebut ditambahkan atau dikurangkan. Dalam menyamakan suku–suku usahakan pecahan tadi mempunyai *suku pembagi bersama terkecil (spbt)*

Contoh:

1) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

2) $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

3) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$

4) $\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{4}{10}-\frac{5}{10}=-\frac{1}{10}$

5) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$

6) $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{2}=(3+4)+\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=7\frac{7}{6}=8\frac{1}{6}$

iii. Operasi Perkalian

Perkalian antar pecahan dilakukan dengan cara mengalikan suku–suku sejenis, suku terbagi dikalikan suku terbagi dan suku pembagi dikalikan suku pembagi. Perkalian yang mengandung bilangan campuran dilakukan dengan cara mengubahnya terlebih dahulu menjadi pecahan tak– layak sebelum dikalikan.

Contoh:

1) $\frac{a}{x}\times\frac{b}{y}=\frac{ab}{xy}$

2) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$

3) $2\frac{2}{3}\times 4\frac{4}{6}=\frac{8}{3}\times\frac{28}{6}=\frac{224}{18}=12\frac{8}{18}=12\frac{4}{9}$

iv. Operasi Pembagian

Pembagian antar pecahan dapat dilakukan dengan tiga macam cara, yaitu:

1) **Cara 1;** Kalikan pecahan terbagi (pecahan yang akan dibagi) dengan kebalikan dari pecahan pembagi.

   Contoh:

   $$\frac{2}{3} \div \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{4} = \frac{12}{12} = 1$$

2) **Cara 2;** Ubah terlebih dahulu pecahan terbagi dan pecahan pembagi sehingga keduanya mempunyai suku pembagi bersama terkecil (spbt), batalkan spbt tersebut dan kemudian bagilah suku–suku terbagi yang tersisa.

   Contoh:

   $$\frac{2}{3} \div \frac{4}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{4}{6} = 4 \div 4 = 1$$

3) **Cara 3;** Kalikan terlebih dahulu kedua pecahan dengan spbt–nya, selesaikan atau sederhanakan masing– masing pecahan dan kemudian baru dibagi.

   Contoh:

   $$\frac{2}{3} \div \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{3} \times 6\right) \div \left(\frac{4}{6} \times 6\right) = 4 \div 4 = 1$$

1.4 Pangkat dan Akar

1. Pangkat

Pangkat dari suatu bilangan adalah suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara berurutan. (Dewi, 2018). Notasi x^a berarti bahwa x harus dikalikan dengan x itu sendiri secara berturut– turut sebanyak a kali.

Contoh:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$$

$$0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}5^{10}$$

Notasi pemangkatan juga berfaedah pula untuk meringkas bilangan–bilangan kelipatan perkalian sepuluh yang nilainya sangat besar atau sangat kecil.

Contoh:

$$1.000.000.000 = 1.10^{9}$$

$$5.000.000.000 = 5.10^{9}$$

$$7.500.000.000 = 7{,}5.10^{9}$$

$$0{,}000.000.001 = 10^{-9}$$

$$0{,}000.000.034 = 3{,}4.10^{-8}$$

2. Kaidah Pemangkatan Bilangan

a. Bilangan bukan nol berpangkat nol adalah satu.

$$x^{0} = 1 \quad (x \neq 0)$$

Contoh:

$4^{0} = 1$

$1000^{0} = 1$

b. Bilangan berpangkat satu adalah bilangan itu sendiri.

$$x^{1} = x$$

Contoh:

$4^{1} = 4$

$1000^{1} = 1000$

c. Nol berpangkat sebuah bilangan adalah tetap nol.

$$0^{a} = 0$$

Contoh:

$0^{4} = 0$

d. Bilangan berpangkat negatif adalah balikan pengali (*multiplicative inverse*) dari bilangan itu sendiri.

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Contoh:

$4^{-1} = \frac{1}{4}$

$1000^{-1} = \frac{1}{1000}$

$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

e. Bilangan berpangkat pecahan adalah akar dari bilangan itu sendiri, dengan suku pembagi dalam pecahan menjadi pangkat dari akarnya sedangkan suku terbagi menjadi pangkat dari bilangan yang bersangkutan.

$$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$$

Contoh:

$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$

$1000^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1000}$

$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$

Bilangan pecahan berpangkat adalah hasil bagi suku–suku berpangkatnya.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

Contoh:

$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3}$

Bilangan berpangkat dipangkatkan lagi adalah bilangan berpangkat hasil kali pangkat– pangkatnya.

$$\left(x^{a}\right)^{b} = x^{ab}$$

Contoh:

$\left(x^{2}\right)^{4} = x^{2.4} = x^{8}$

$\left(2^{2}\right)^{4} = 2^{2.4} = 2^{8} = 256$

Bilangan dipangkatkan pangkat–berpangkat adalah bilangan berpangkat hasil pemangkatan pangkatnya.

$$x^{a^{b}} = x^{c}$$

$$\text{dimana} \quad c = a^{b}$$

Contoh:

$2^{3^{2}} = 2^{9} = 512$

3. Kaidah Perkalian Bilangan Berpangkat

a. Hasil kali bilangan–bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat jumlah pangkat– pangkatnya.

$$x^{a}.x^{b} = x^{a+b}$$

Contoh:

$2^{3}.2^{4} = 2^{3+4} = 2^{7} = 128$

b. Hasil kali bilangan–bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah perkalian basis– basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

$$x^{a}.y^{a} = (xy)^{a}$$

Contoh:

$2^{2}.3^{2} = (2.3)^{2} = 6^{2} = 36$

4. Kaidah Pembagian Bilangan Berpangkat

a. Hasil bagi bilangan–bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat selisih pangkat– pangkatnya.

$$x^{a} \div .x^{b} = x^{a-b}$$

Contoh:

$$2^4 \div 2^3 = 2^{4-3} = 2^1 = 2$$

b. Hasil bagi bilangan–bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah pembagian basis– basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

$$x^a \div y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

Contoh:

$$5^3 \div 3^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3$$

5. Akar

Akar merupakan bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangkat. Akar dari sebuah bilangan ialah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya. Berdasarkan konsep pemangkatan kita mengetahui, bahwa jika bilangan–bilangan yang sama (misalkan *x*) dikalikan sejumlah tertentu sebanyak (katakanlah) *a* kali, maka kita dapat menuliskan menjadi x^a; *x* disebut *basis* dan *a* disebut *pangkat*.

Misalkan $x^a = m$, maka *x* dapat pula disebut sebagai akar pangkat *a* dari *m*, yang ditulis dalam bentuk akar menjadi $x = \sqrt[a]{m}$. Jadi, $x = \sqrt[a]{m}$ sebab $x^a = m$; atau dengan perkataan lain, $x = \sqrt[a]{m}$ jika $x^a = m$.

Contoh:

$$\sqrt[2]{9} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3 \quad \text{sebab} \quad 3^2 = 9$$

$$\sqrt[3]{64} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4 \quad \text{sebab} \quad 4^3 = 64$$

Berikut ini akan diuraikan kaidah–kaidah yang berlaku pada pengoperasian bentuk akar.

a. Kaidah Pengakaran

1) $\sqrt[b]{x} = x^{\frac{1}{b}}$

Contoh.:

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

2) $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

Contoh:

$$\sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$$

3) $\sqrt[b]{xy} = \sqrt[b]{x}.\sqrt[b]{y}$

Contoh:

$$\sqrt[3]{5.3} = \sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{3}$$

4) $\sqrt[b]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}}$

Contoh:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}$$

b. Kaidah Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

1) Jumlah bilangan–bilangan terakar adalah jumlah koefisien–koefisien terakar.

$$m.\sqrt[b]{x^a} + n.\sqrt[b]{x^a} = (m+n).\sqrt[b]{x^a}$$

Contoh:

$$25.\sqrt{3} + 5.\sqrt{3} = (25 + 5).\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$$

2) Pengurangan bilangan–bilangan terakar adalah selisih koefisien–koefisien terakar.

$$m.\sqrt[b]{x^a} - n.\sqrt[b]{x^a} = (m - n).\sqrt[b]{x^a}$$

Contoh:

$$25.\sqrt{3} - 5.\sqrt{3} = (25 - 5).\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$$

c. Kaidah Perkalian

1) Hasil kali bilangan–bilangan terakar adalah akar dari hasil kali bilangan–bilangannya. Perkalian hanya dapat dilakukan apabila akar– akarnya berpangkat sama.

$$\sqrt[b]{x}.\sqrt[b]{y} = \sqrt[b]{xy}$$

Contoh:

$$\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8.64} = \sqrt[3]{512} = \left(2^9\right)^{\frac{1}{3}} = 2^3 = 8$$

2) Akar ganda dari sebuah bilangan terakar adalah akar pangkat baru bilangan bersangkutan; pangkat baru akarnya adalah hasil kali pangkat dari akar– akar sebelumnya.

$$\sqrt[b]{\sqrt[x]{x^a}} = \sqrt[bx]{x^a}$$

Contoh:

$$\sqrt{\sqrt[3]{15625}} = \sqrt[2.3]{15625} = \sqrt[6]{15625} = (5^6)^{\frac{1}{6}} = 5^1 = 5$$

d. Kaidah Pembagian

1) Hasil bagi bilangan–bilangan terakar adalah akar dari hasil bagi bilangan–bilangannya. Pembagian hanya dapat dilakukan apabila akar– akarnya berpangkat sama.

$$\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\frac{x}{y}}$$

Contoh:

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{2^{-3}} = (2^{-3})^{\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

1.5 Rangkuman

Himpunan

Teori himpunan bersifat sangat mendasar dalam matematika. Ia melandasi hampir semua cabang ilmu hitung modern. Di dalam kehidupan sehari– hari, tanpa disadari manusia sudah sering menerapkan konsepsi himpunan.

Himpunan adalah suatu kumpulan atau gugusan dari sejumlah obyek. Obyek–obyek yang mengisi atau membentuk suatu himpunan disebut anggota, atau elemen, atau unsur. Obyek–obyek suatu himpunan sangat bervariasi; bisa berupa orang–orang tertentu, tanam– tanaman tertentu, benda– benda tertentu, dan sebagainya. Dalam penyajian secara umum himpunan dilambangkan dengan huruf–huruf besar seperti ***A, B, C, D, P, Q, R, X, Y,*** atau ***Z***. Sedangkan obyek –obyek yang menjadi anggota suatu himpunan dilambangkan dengan huruf–huruf kecil *a**, b, c, d, p, q, r, x, y,*** atau ***z***.

Operasi Himpunan terdiri dari Gabungan (*Union*), Irisan (*Intersection*), Selisih, Pelengkap (*Complement*).

Sistem bilangan

Dalam matematika, bilangan–bilangan yang ada dapat digolongkan sebagaimana urian pembagian jenis bilangan berikut ini ***Bilangan nyata*** dan ***Bilangan khayal*** .Perbedaan antara kedua jenis bilangan ini adalah bahwa bilangan nyata mengandung salah satu “sifat” secara tegas yaitu: positif atau negatif, dan tidak kedua– keduanya. Sedangkan bilangan khayal tidak jelas sifatnya, apakah positif ataukah negatif. Bilangan khayal yang mengandung kedua sifat positif dan negatif sekaligus, disebut ***bilangan kompleks.***

Pangkat dan akar

Pangkat dari suatu bilangan adalah suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara berurutan. Notasi x^a berarti bahwa *x* harus dikalikan dengan *x* itu sendiri secara berturut– turut sebanyak *a* kali.

Akar merupakan bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangkat. Akar dari sebuah bilangan ialah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya. Berdasarkan konsep pemangkatan kita mengetahui, bahwa jika bilangan–bilangan yang sama (misalkan *x*) dikalikan sejumlah tertentu sebanyak (katakanlah) *a* kali, maka kita dapat menuliskan menjadi x^a; *x* disebut *basis* dan *a* disebut *pangkat*.

Misalkan $x^a = m$, maka *x* dapat pula disebut sebagai akar pangkat *a* dari *m*, yang ditulis dalam bentuk akar menjadi $x = \sqrt[a]{m}$. Jadi, $x = \sqrt[a]{m}$ sebab $x^a = m$; atau dengan perkataan lain, $x = \sqrt[a]{m}$ jika $x^a = m$.

1.6 Latihan

Himpunan

1. Gambarkan sebuah diagram venn untuk menunjukkan himpunan universal *U* dan himpunan– himpunan bagian *A* serta *B*, jika

   $\text{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,\}$

   $\text{A} = \{2,3,5,7\}$

   $\text{B} = \{1,3,4,7,8\}$

   Kemudian selesaikan:

   a. $A - B$

   b. $B - A$

   c. $A \cap B$

d. $A \cup B$

e. $A \cap \overline{B}$

f. $B \cap \overline{A}$

2. Gambarkanlah sebuah diagram venn yang menunjukkan himpunan universal *U* dan himpunan– himpunan bagian *A* serta *B*, jika:

$U = \{x; 3 < x < 14\}$

$A = \{6,7,9,10,13\}$

$B = \{4,5,11\}$

Kemudian selesaikan:

a. $A - B$

b. $B - A$

c. $A \cap B$

d. $A \cup B$

e. $A \cap \overline{B}$

f. $B \cap \overline{A}$

3. Misalkan diketahui:

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$B = \{3,4,6,7,13\}$

$C = \{5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

Gambarkan diagram–diagram venn–nya kemudian selesaikan:

a. $A \cap B$

b. $A \cup B$

c. $C \cap A$

d. $B \cap C$

e. $A \cup B \cup C$

f. $A \cap B \cap C$

g. $(A \cup B) \cap C$

h. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$

i. $A \cap B \cap \overline{C}$

4. Misalkan diketahui:
$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$P = \{2,4,6,8\}$
$Q = \{0,5,9\}$
$R = \{3,7,9\}$
Tanpa menggunakan diagram venn, tentukan:
a. $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$
b. $P \cap Q$, $P \cup Q$, $P \cap R$, $P \cup R$, $Q \cap R$, $\mathrm{Q} \cup \mathrm{R}$
c. $P - Q$, $Q - P$, $P \cap \overline{Q}$, $\overline{\mathrm{P}} \cap R$, $P - (Q - R)$, $(P - Q) - R$
d. $P \cup (Q \cap R), P \cap (Q \cup R), (P \cup Q) \cap (P \cup R), (P \cap Q) \cup (P \cap R)$
e. $\overline{P} \cup \overline{Q}$, $\overline{P} \cap' \overline{Q}$, $\overline{P \cup Q}$, $\overline{P \cap Q}$

5. Apabila U adalah sebuah himpunan universal, tentukan mana yang benar dan salah di antara pernyataan– pernyataan di bawah ini:
a. $A \cup \overline{A} = U$
b. $A \cap \overline{A} = A$
c. $B \cap U = B$
d. $B \cup U = U$
e. $C \cup \phi = C$
f. $C \cap C = \phi$
g. $D \cap \phi = \phi$
h. $D \cap D = D$
i. $\left(\overline{\overline{B}}\right) = U$
j. $(A - C) \cup C = A - C$

k. $B \cap (B - D) = B \cup D$

l. $(A \cup D) - D = A - D$

Sistem Bilangan

6. Mana yang salah diantara pernyataan– pernyataan berikut?
   a. Bilangan positif berpangkat genap menghasilkan bilangan positif.
   b. Bilangan negatif berpangkat genap menghasilkan bilangan positif.
   c. Bilangan negatif berpangkat ganjil menghasilkan bilangan negatif.
   d. Bilangan positif berpangkat ganjil menghasilkan bilangan negatif.

7. Ubahlah pecahan– pecahan biasa di bawah ini menjadi pecahan desimal, sampai tiga angka di belakang koma:
   a. $\frac{4}{5}$
   b. $\frac{6}{5}$
   c. $\frac{4}{15}$
   d. $\frac{4}{50}$

8. Tentukan spbt pasangan– pasangan pecahan berikut ini:
   a. $\frac{4}{5}$ dan $\frac{4}{50}$
   b. $\frac{4}{50}$ dan $\frac{4}{15}$

c. $\frac{4}{15}$ dan $\frac{6}{5}$

d. $\frac{6}{5}$ dan $\frac{4}{5}$

9. Hitunglah jumlah dari masing– masing pasangan pecahan pada soal no. 8 di atas.

10. Hitunglah selisih dari masing– masing pasangan pecahan pada soal no. 8 di atas dan sajikan secara desimal.

11. Hitunglah hasil kali dari masing– masing pasangan pecahan pada soal no. 8 di atas

12. Hitunglah hasil bagi dari masing– masing pasangan pecahan pada soal no. 8 di atas.

13. Selesaikan:

a. $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$

b. $\frac{4}{6}+\frac{3}{7}+\frac{1}{3}$

c. $\frac{4}{5}-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$

d. $\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}$

e. $\frac{4}{6}\div\frac{3}{7}\div\frac{1}{3}$

14. Selesaikan:

a. $0{,}35+0{,}55-0{,}75$

b. $0{,}35 - 0{,}55 - 0{,}75$

c. $0{,}35 \times 0{,}55 \times 0{,}75$

d. $0{,}35 \div 0{,}55 \div 0{,}75$

Pangkat dan Akar

15. Sederhanakanlah bentuk– bentuk berikut:

a. $2^3.2^4.2^5$

b. $3^3.3^4.3^5$

c. $3^{-3}.3^4.3^{-5}$

d. $2^3.2^5 \div 2^6$

16. Ubahlah bentuk– bentuk berikut ke dalam bentuk akar;

a. $3^{\frac{2}{3}}$

b. $3^{\frac{1}{7}}.3^{\frac{4}{7}} \div 3^{\frac{2}{7}}$

c. $2^{\frac{2}{5}}.2^{\frac{3}{5}} \div 2^{\frac{1}{5}}$

17. Sederhanakanlah kemudian selesaikan:

a. $25.\sqrt{3} + 5.\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$

b. $2.\sqrt{2} + 5.\sqrt{2}$

c. $25.\sqrt{3} - 5.\sqrt{3} + 30\sqrt{3}$

d. $25.\sqrt{3} - 5.\sqrt{3} + 30\sqrt{3} - 15.\sqrt{2} + 12\sqrt{2}$

BAB II

TURUNAN (DERIVATIF)

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami:

2.1 Pengertian Derivatif
2.2 Turunan (derivarif).
2.3 Notasi Turunan.
2.4 Kaidah– Kaidah Diferensiasi
2.5 Turunan Orde yang Lebih Tinggi
2.6 Penerapan Turunan dalam Ilmu Ekonomi

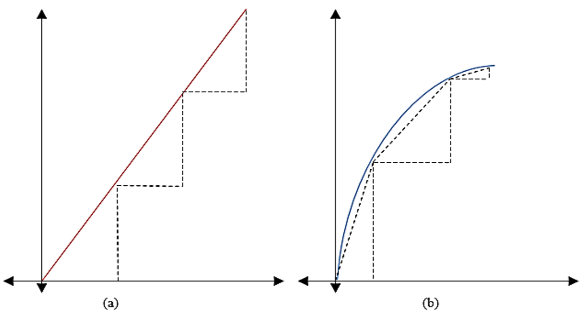
2.1 Pengertian Derivatif

1. Kemiringan Fungsi Kurvilinier

Tingkat perubahan rata–rata $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ untuk suatu fungsi linear adalah konstan, dan sama dengan kemiringannya. Sebaliknya, tingkat perubahan rata–rata untuk suatu fungsi kurvilinier berubah–ubah menurut gerakan berurutan sepanjang kurva (lihat gambar 21). Jadi, kemiringan suatu fungsi kurvilinier tidak konstan, ia berbeda pada titik yang berbeda sepanjang titik tertentu adalah sama dengan kemiringan garis yang ditarik menyinggung kurva (tangen) pada titik itu. (lihat gambar 2.2.).

<u>Contoh:</u>

Dalam gambar 2.1 (a), tingkat perubahan rata–rata $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ adalah konstan. Untuk setiap perubahan satu unit *x*, $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ sama dengan $1\frac{1}{3}$. Dalam gambar 2.1(b). tingkat perubahan rata–rata berubah menurut setiap gerakan berurutan sepanjang kurva. Untuk perubahan satu unit pertama dalam *x*, perubahan *y* adalah 2; untuk perubahan satu unit kedua dalam *x*, perubahan *y* adalah 1, dan untuk perubahan satu unit ketiga dalam *x*, perubahan *y* adalah $^2\!/_3$.



Gambar 2.1.

Tingkat perubahan rata–rata juga dapat diukur dengan tangen (garis singgung) α . Dalam trigonometri *tangen* suatu sudut adalah sama dengan sisi yang berhadapan dengan sudut itu dibagi dengan sisi yang berdampingan, di sini $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Pada gambar 2.1 (a), tangen α mengukur tingkat perubahan rata–rata yang sebenarnya dari fungsi tersebut dan karena itu merupakan kemiringan fungsi tersebut. Dalam gambar 2.1 (b), tangen hanya mendekati tingkat perubahan rata–rata sebenarnya dari fungsi tersebut sebagaimana diperlihatkan garis putus–putus yang menghubungkan dua titik pada kurva. Pendekatan kasar ini akan disempurnakan nanti pada turunan *(derivatif*)

Contoh:

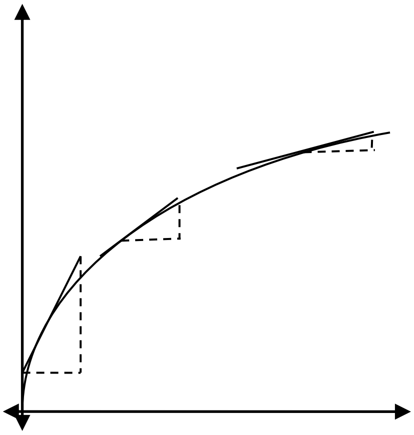
Sebagai garis lurus, garis singgung (tangen) mempunyai kemiringan konstan yang mengukur perubahan *y* yang diakibatkan perubahan *x*, bagi setiap gerakan sepanjang garis, tanpa memandang bagaimanapun kecilnya. Ini mencakup titik dimana garis singgung persis menyentuh kurva. Jadi, kemiringan suatu garis singgung pada suatu titik sama dengan kemiringan kurva pada titik itu.

Pada gambar 2.2, tiga garis lurus yang berbeda digambarkan pada titik A, B, dan C pada kurva. Kemiringan garis– garis singgung tersebut menunjukkan kemiringan fungsi pada titik– titik yang diberikan. Agar lebih jelas, Δy dan Δx digambarkan relatif besar, tetapi karena kemiringan suatu garis lurus di mana– mana adalah konstan, ia juga memberikan suatu ukuran perubahan *y* sehubungan dengan perubahan *x* untuk setiap fungsi kurvilinier tersebut pada titik yang diberikan.

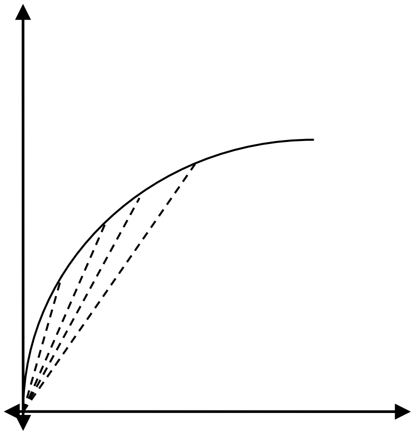
Contoh:

Gambar 2.2, juga menjelaskan bahwa kemiringan fungsi kurvilinear berbeda pada titik yang berbeda sepanjang kurva. Kemiringan garis singgung (dan karena itu juga fungsi kurvilinear) di A lebih besar daripada kemiringan di B dan kemiringan di B lebih besar dari pada kemiringan di

C. Sebagai sifat umum, makin curam garis singgungnya, makin besar nilai absolut kemiringan kurva di titik itu; makin datar garis singgungnya, makin kecil nilai absolut kemiringan kurva di titik itu.



Gambar 2.2



Gambar 2.3

2.2 Turunan (Derivatif)

Turunan mengukur tingkat perubahan seketika dari suatu fungsi, yaitu bagaimana variabel tak bebas berubah sehubungan dengan suatu perubahan unit yang sangat kecil dalam variabel bebas. Terminologi yang formal untuk turunan adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname*{limit}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Di sini $\frac{dy}{dx}$ merupakan suatu pernyataan gabungan yang dibaca: *turunan y berkenaan dengan x*; ini sama dengan limit rasio dari $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ saat Δx mendekati 0. Turunan mengukur kemiringan kurvilinier.

Contoh:

Seperti terlihat pada gambar 2.3, makin kecil perubahan *x*, makin akurat tangen α mengukur tingkat yang sebenarnya dari fungsi tersebut. Jika Δx mendekati nol, seperti dalam turunan, garis terputus–putus akan menyinggung kurva dan mengukur kemiringan yang sebenarnya $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ pada titik itu.

2.3 Notasi Turunan

Turunan dapat dinyatakan dalam bentuk– bentuk lain selain $\frac{dy}{dx}$. Notasi seperti ini meliputi $f'(x)$ dan f_x untuk turunan *y* berkenaan dengan *x* bagi fungsi $y = f(x)$, dan y' atau y_x untuk turunan *y* berkenaan dengan *x* bagi fungsi $y = y(x)$. Turunan dapat pula ditulis sebagai $\frac{d}{dx}y$ atau $\frac{d}{dx}f(x)$.

Contoh:

Turunan $y = \phi(x)$ dapat dinyatakan sebagai $\frac{dy}{dx}, \phi', \phi_x, \frac{d}{dx}y$, atau $\frac{d}{dx}\phi(x)$.

Turunan $y = F(x)$ dapat dinyatakan sebagai $\frac{dy}{dx}, F', F_x, \frac{d}{dx}y$, atau $\frac{d}{dx}F(x)$

.

Turunan $C = C(Y)$ dapat dinyatakan sebagai $\frac{dC}{dY}, C', C_x, \frac{d}{dY}C$, atau $\frac{d}{dY}C(x)$.

2.4 Kaidah– Kaidah Diferensiasi

Diferensiasi adalah proses penentuan turunan dari suatu fungsi, yaitu mencari perubahan *y* berkenaan dengan suatu perubahan *x* apabila perubahan *x* (Δx) mendekati nol. Ini tidak melibatkan sesuatu yang rumit selain sekedar penerapan beberapa rumus atau kaidah dasar pada fungsi.

Dalam menerangkan kaidah-kaidah ini, umumnya pakai fungsi pembantu seperti *u* dan *v*, dimana *u* adalah suatu fungsi *x*, *u*(*x*) yang tidak bersifat spesifik dan *v* adalah suatu fungsi *x*, *v*(*x*) yang tidak bersifat spesifik.

1. Kaidah Fungsi Konstan

Turunan fungsi konstanta, y = k, dimana *k* adalah suatu konstanta, adalah nol.

Misalnya y = k maka $\frac{dy}{dx} = 0$

Contoh:

Apabila diketahui $y = 10$, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

Apabila diketahui $y = 150$, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

Karena *y* adalah konstanta, *y* tidak akan berubah untuk setiap perubahan *x*. Karena itu $dy = 0$ tanpa memperhatikan perubahan, $\frac{dy}{dx} = 0$.

2. Kaidah Fungsi Linier

Turunan fungsi linier, $y = a + bx$, adalah sama dengan *b*, koefisien dari x.

Misalnya $y = a + bx$ maka $\frac{dy}{dx} = b$

Contoh:

Apabila diketahui $y = 10 + 5x$, maka $\frac{dy}{dx} = 5$

Apabila diketahui $y = 150 + 25x$, maka $\frac{dy}{dx} = 25$

Apabila diketahui $y = 150x$, maka $\frac{dy}{dx} = 150$

Turunan $\frac{dy}{dx}$ mengukur tingkat perubahan seketika dari fungsi, atau kemiringannya, dan diketahui kemiringan suatu fungsi adalah b , yang merupakan koefisien variabel bebas, dan bahwa b adalah konstanta.

3. Kaidah Fungsi Pangkat

Turunan fungsi pangkat, $y = ax^p$, adalah sama dengan eksponen p kali dengan koefisien *a*, dikalikan dengan variabel *x* dipangkatkan dengan $(p-1)$.

Misalnya $y = ax^p$ maka $\frac{dy}{dx} = pax^{p-1}$

Contoh:

Apabila diketahui $y = 5x^3$, maka $\frac{dy}{dx} = 3.5.x^{3-1} = 15x^2$

Apabila diketahui $y = 25x^4$, maka $\frac{dy}{dx} = 4.25.x^{4-1} = 100x^3$

Apabila diketahui $y = x^5$, maka $\frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$

4. Kaidah untuk Penjumlahan dan Pengurangan

Turunan suatu bentuk penjumlahan, $y = u(x) + v(x)$ adalah sama dengan jumlah dari turunan-turunan fungsi *individual*. Turunan suatu bentuk pengurangan, $y = u(x) - v(x)$ adalah sama dengan pengurangan dari turunan - turunan fungsi *individual*.

Misalnya $y = u(x) \pm v(x)$ maka $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$.

Contoh:

Apabila diketahui $y = 12x + 5x^3$, maka $\frac{dy}{dx} = 12 + 15x^2$

Apabila diketahui $y = 100 - 25x^2 + 25x^4$, maka $\frac{dy}{dx} = -50x + 100x^3$

Apabila diketahui $y = 15x^2 + 10x^4 - x^5$, maka $\frac{dy}{dx} = 30x + 40x^3 - 5x^4$

Catatan: untuk mencari turunan masing– masing suku, terapkan kaidah mana saja yang layak.

5. Kaidah Perkalian

Turunan suatu bentuk perkalian, $y = u(x).v(x)$ adalah sama dengan fungsi pertama dikalikan dengan turunan fungsi yang kedua ditambah fungsi kedua dikalikan dengan turunan fungsi yang pertama.

Misalnya $y = u(x).v(x)$ maka $\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$

Contoh:

Apabila diketahui $y = 12x.5x^3$

$$u = 12x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 12$$

$$v = 5x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 15x^2$$

maka
$$\frac{dy}{dx} = 12x.(15x^2) + 5x^3.12$$
$$= 180x^3 + 60x^3$$
$$= 240x^3$$

Apabila diketahui $y = (x-5).\left(x^2-6\right)$ maka

$$u = (x-5) \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1$$

$$v = \left(x^2-6\right) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-5).2x + \left(x^2-6\right).1$$

$$= 2x^2 - 10x + x^2 - 6$$

$$= 3x^2 - 10x - 6$$

Apabila diketahui $y = \left(x^2-1\right).\left(x^2-6\right)$ maka

$$u = \left(x^2-1\right) \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$v = \left(x^2-6\right) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^2-1\right).2x + \left(x^2-6\right).2x$$

$$= 2x^3 - 2x + 2x^3 - 12x$$

$$= 4x^3 - 14x$$

6. Kaidah Hasil Bagi

Turunan bentuk hasil bagi, $y = \frac{u}{v}$ adalah sama dengan penyebut kali turunan dari pembilang, dikurangi pembilang kali turunan penyebut, semuanya dibagi dengan penyebut yang dikuadratkan.

Misalnya $y = \frac{u}{v}$ maka $\frac{dy}{dx} = \frac{v.\left(\frac{du}{dx}\right) - u.\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$

Urutan dalam pembilang dari rumus adalah penting dan tidak dapat dibalik.

<u>Contoh:</u>

Apabila diketahui $y = \frac{(x^2 - 1)}{(x^2 - 6)}$ maka

$$u = (x^2 - 1) \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$v = (x^2 - 6) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 6).2x - (x^2 - 1).2x}{(x^2 - 6)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 12x - 2x^3 + 2x}{(x^2 - 6)^2}$$

$$= \frac{-10x}{(x^2 - 6)^2}$$

Apabila diketahui $y = \frac{(x - 5)}{(x^2 - 6)}$ maka

$$u = (x - 5) \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1$$

$$v = (x^2 - 6) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 6).1 - (x - 5).2x}{(x^2 - 6)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 6 - 2x^2 + 10x}{(x^2 - 6)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 10x - 6}{(x^2 - 6)^2}$$

Apabila diketahui $y = \dfrac{4x^3}{4x+3}$ maka

$$u = 4x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^2$$

$$v = 4x + 3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x+3).12x^2 - 4x^3.4}{(4x+3)^2}$$

$$= \frac{48x^3 + 36x^2 - 16x^3}{(4x+3)^2}$$

$$= \frac{32x^3 + 36x^2}{(4x+3)^2}$$

7. Kaidah untuk Fungsi dari Fungsi

Turunan $\dfrac{dy}{dx}$ fungsi dari fungsi $y = f(u)$, dimana $u = g(x)$, adalah sama dengan turunan fungsi pertama berkenaan dengan *u* dikalikan dengan turunan fungsi kedua berkenaan dengan *x*. Ini disebut ***kaidah berantai (chain rule).***

Misalnya $y = f(u),\ u = g(x)$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx}$

Contoh:

Jika $y = u^4$ dan $u = 2x^2 + 3$ Maka:

$$\frac{dy}{du} = 4u^3$$

$$\frac{du}{dx} = 4x$$

Dengan substitusi kaidah berantai diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3.4x = 16xu^3$$

Apabila $u = 2x^2 + 3$ disubstitusikan menghasilkan:

$$\frac{dy}{dx} = 16x(2x^2 + 3)^3$$

Jika diketahui $y = (4x + 2)^3$ tentukanlah $\frac{dy}{dx}$!

Penyelesaian:
Misal

$$u = 4x + 2 \Rightarrow y = u^3$$
$$\frac{dy}{du} = 3u^2$$
$$\frac{du}{dx} = 4$$

Dengan menggunakan kaidah berantai diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 .4 = 12u^2$$

Dan dengan substitusi $u = 4x + 2$,

$$\frac{dy}{dx} = 12u^2 = 12(4x + 2)^2$$

2.5 Turunan Orde yang Lebih Tinggi

Turunan kedua $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ mengukur tingkat perubahan turunan pertama ($\frac{dy}{dx}$) mengukur fungsi asal atau fungsi primitif (*primitive function*). Turunan ketiga $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ mengukur tingkat perubahan turunan kedua dan seterusnya. Turunan yang lebih tinggi didapatkan secara sederhana dengan menerapkan kaidah diferensiasi pada turunan sebelumnya.

Contoh:

Notasi umum untuk turunan kedua: $\frac{d^2y}{dx^2}$, $f''(x), y'', D^2y, f_{xx}$

Notasi umum untuk turunan jenjang ketiga: $\frac{d^3y}{dx^3}$, $f'''(x), y''', D^3y, f_{xxx}$

Notasi umum untuk turunan jenjang keempat: $\frac{d^4y}{dx^4}$, $f^4(x), y^4, D^4y, f_{(4)}$

Dan seterusnya.

Contoh:

$y = 2x^4 + 5x^3 + 3x^2$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 + 15x^2 + 6x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 + 30x + 6$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 48x + 30$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 48$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 0$$

2.6 Penerapan Turunan dalam Ilmu Ekonomi

1. Konsep Marjinal

Biaya Marjinal (*marjinal cost* atau *MC*) dalam ilmu ekonomi dedefinisikan sebagai perubahan dalam *biaya total* (*total cost atau TC*) yang terjadi sebagai akibat dari produksi suatu unit tambahan. *Pendapatan marjinal* (*marginal revenue* atau *MR*) didefinisikan sebagai perubahan dalam *pendapatan total* (*total revenue* atau *TR*) yang disebabkan oleh penjualan suatu barang tambahan. Karena baik biaya total maupun pendapatan marginal masing– masing dapat dinyatakan secara matematis sebagai turunan dari fungsi total mereka masing– masing. Jadi, Jika $TC = TC(Q)$, maka $MC = \frac{dTC}{dQ}$

Jika $TR = TR(Q)$, maka $MR = \frac{dTR}{dQ}$

Contoh:

Jika $TR = 75Q - 4Q^2$, maka $MR = \frac{dTR}{dQ} = 75 - 8Q$

Jika $TC = Q^{l7Q+23}$, maka $MC = \frac{dTC}{dQ} = 2Q + 7$

Contoh:

Misal diketahui fungsi permintaan $P = 30 - 2Q$, maka fungsi pendapatan marjinal dapat diperoleh dengan mencari terlebih dahulu fungsi pendapatan total dan kemudian mengambil turunan dari fungsi itu berkenaan dengan *Q*. Jadi,

$$TR = PQ = (30 - 2Q).Q = 30Q - 2Q^2$$

Kemudian,

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 30 - 4Q$$

Jika $Q = 4$, $MR = 30 - 4.4 = 14$

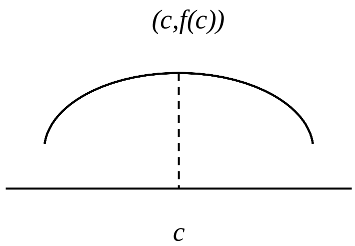
Jika $Q = 5$, $MR = 30 - 4.5 = 10$

2. Maksimasi dan Minimasi suatu Fungsi

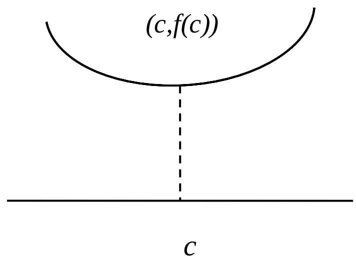
Misalkan *f* adalah suatu fungsi yang turunan pertamanya ada pada interval terbuka yang memuat *c*.

- *Fungsi f dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif di c jika pada interval terbuka yang memuat c berlaku* $f(c) > f(x)$ *untuk setiap nilai x di interval ini.*
- *Fungsi f dikatakan mempunyai nilai minimum relatif di c jika pada interval terbuka yang memuat c berlaku* $f(c) < f(x)$ *untuk setiap nilai x di interval ini.*

Perhatikan situasi yang menggambarkan nilai maksimum relatif dan minimum relatif berikut:



Gb.2.4



Gb.2.5

Jika $y = f(x)$ kontinu dalam interval terbuka dan mempunyai maksimum atau minimum pada $x = c$, maka $f'(c) = 0$, akan tetapi $f'(c) = 0$ belum menjamin bahwa $y = f(x)$ mempunyai maksimum atau minimum. Dapat dikatakan bahwa pada titik maksimum atau minimum, maka $f'(x) = 0$. Selain maksimum relatif dan minimum relatif, masih ada maksimum mutlak dan minimum mutlak.

Uji Turunan Kedua untuk Ektrem Relatif.

Titik ektrem relatif dari fungsi *f* dapat juga ditentukan dengan memeriksa turunan kedua dari fungsi tersebut di titik kritisnya, yang ditulis pada teorema berikut ini. Misalkan *x* adalah titik kritis fungsi *f*, yaitu $f'(x_1) = 0.$: *f'* dan *f''* terdapat pada interval terbuka yang memuat x_1.

- Bila $f''(x) < 0$, maka $(x_1, f(x_1))$ adalah ***titik maksimum relatif*** fungsi *f* dengan nilai maksimum relatif .
- Bila $f''(x) > 0$, maka $(x_1, f(x_1))$ adalah ***titik minimum relatif*** fungsi *f* dengan nilai minimum relatif $f(x_1)$.

<u>Contoh:</u>

Tentukanlah titik balik pada grafik fungsi $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5.$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$$

- Titik balik terjadi bila, $\frac{dy}{dx} = 0.$

  $\therefore x^2 - x - 2 = 0$
  $\therefore (x-2).(x+1) = 0$
  $\therefore x = 2 \quad \text{dan} \quad x = -1$

  Titik balik terjadi pada $x = 2$ dan $x = -1$.

- Untuk menentukan jenis masing– masing titik balik, substitusikan $x = 2$ ke dalam $\frac{d^2y}{dx^2}$, demikian juga $x = -1$.

  Di titik $x = 2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 - 1 = 3$, yaitu ***positif*** sehingga $x = 2$ menghasilkan $Y_{\min}$.

  Di titik $x = -1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 - 1 = -3$, yaitu ***negatif*** sehingga $x = -1$ menghasilkan $Y_{\max}$.

<u>Contoh:</u>

Diketahui $TC = 31 + 24Q - \frac{11}{2}Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$, untuk mencari minimum relatif atau maksimum relatif bagi suatu fungsi biaya total.

Penyelesaian:

Pertama, carilah nilai kritis dengan mengambil turunan fungsi tersebut dan menyamakannya dengan nol.

$$\frac{dTC}{dQ} = 24 - 11Q + Q^2 = 0$$

$$(Q-8).(Q-3) = 0$$

Nilai– nilai kritisnya adalah $Q = 8$ dan $Q = 3$

Kedua, Tentukan turunan kedua untuk melihat apakah pada nilai kritis, fungsi tersebut akan minimum atau maksimum.

$$\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2Q$$

Pada $Q = 8$, $\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2Q = -11 + 2.8 = 5 > 0$

Pada $Q = 3$, $\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2Q = -11 + 2.3 = -5 < 0$

Jadi pada $Q = 8$, *TC* berada pada suatu minimum relatif dan pada $Q = 3$, *TC* berada pada suatu maksimum relatif.

Pada $Q = 8$, $TC = 31 + 24.8 - \frac{11}{2}8^2 + \frac{1}{3}8^3 = 41{,}67$

Pada $Q = 3$, $TC = 31 + 24.3 - \frac{11}{2}3^2 + \frac{1}{3}3^3 = 62{,}5$

Titik Belok

Titik $(c, f(c))$ dikatakan ***titik belok*** grafik fungsi f jika di titik tersebut grafik fungsi f mempunyai garis singgung dan berada pada interval terbuka I yang memuat c, sehingga untuk $x \in I$ berlaku:

- $f''(x) < 0$ bila $x < c$ dan $f''(x) > 0$ bila $x > c$; atau
- $f''(x) > 0$ bila $x < c$ dan $f''(x) < 0$ bila $x > c$.

Jadi titik $(c, f(c))$ adalah titik belok grafik fungsi f, karena pada titik ini terjadi perubahan kecekungan grafik fungsinya. Sumbu x adalah garis singgungnya. Teorema berikut menyatakan bahwa pada titik belok turunan kedua sama dengan nol, bila ada.

Teorema

Jika f berada pada interval terbuka yang memuat $(c, f''(c))$ *dan titik* $(c, f(c))$ *adalah titik belok grafik fungsi f, maka* $f''(c)=0$.

Dalam hal $f'(x=c)=0$ dan $f''(x=c)=0$, maka untuk mengetahui maksimum atau minimum pada titik $x=c$ dicari turunan tinggi $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. Kemudian, jika:

- n genap, maka $f(x)$ tidak mempunyai maksimum atau minimum pada $x=c$, atau $x=c$ adalah titik belok.
- n ganjil, maka $f^{(n+1)}(c)<0$, maka $f(x)$ maksimum pada $x=c$, dan bila $f^{(n+1)}(c)>0$, maka $f(x)$ minimum pada $x=c$.

Contoh:

Tentukanlah titik belok, jika ada, pada grafik fungsi $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+5.$

Penyelesaian:

- *Differensiasi dua kali.*

$$\frac{dy}{dx}=x^2-x-2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2x-1$$

Untuk titik belok, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ dengan perubahan tanda.

Sehingga :

$\left(2x-1\right)=0$

$$x=\frac{1}{2}$$

Jika tidak ada titik belok, haruslah titik tersebut terjadi pada $x=\frac{1}{2}$.

- *Uji perubahan tanda.*

  Kita tinjau titik $x=\frac{1}{2}-a$ dan $x=\frac{1}{2}+a$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2x-1$$

Di $x=\frac{1}{2}-a$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2.\left(\frac{1}{2}-a\right)-1=-2a.(negatif)$

Di $x=\frac{1}{2}+a$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2.\left(\frac{1}{2}+a\right)-1=2a.(positif)$

Ada perubahan tanda $\frac{d^2y}{dx^2}$ ketika kita melintasi $x=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ ada titik belok di $x=\frac{1}{2}$.

3. Elastisitas Harga

Dalam ilmu ekonomi, *elastisitas harga* $\in$ (*price elasticity*) mengukur persentase perubahan dalam kuantitas dihubungkan dengan persentase perubahan dalam harga. Secara Matematis,

$$\in=\frac{dQ/Q}{dP/P}$$

Untuk memudahkan perhitungan matematis, elastisitas harga sering dinyatakan dalam bentuk lain:

$$\in=\frac{dQ/Q}{dP/P}=\frac{\text{fungsi marginal}}{\text{fungsi rata - rata}} \text{ atau } \in=\frac{dQ}{dP}.\frac{P}{Q}$$

Terdapat ***elastisitas harga*** baik untuk penawaran maupun permintaan. Keduanya dikatakan ***elastis*** jika $|\in| > 1$, ***tidak elastis*** jika $|\in| < 1$, dan ***elastis sempurna*** (*unitary elastic*) jika $|\in| = 1$.

<u>Contoh:</u>

Dengan mengetahui fungsi permintaan $Q_d = 650 - 5P - P^2$, dimana $P = 10$, maka elastisitas harga dari permintaan (*price elasticity of demand*) ditentukan seperti terlihat di bawah ini.

Dengan menggunakan bentuk bertahap dari rumus: $\in = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$

Pertama, cari turunannya $\frac{dQ}{dP} = -5 - 2P$

Kemudian substitusikan tingkat harga yang telah diketahui $(P = 10)$

$$\frac{dQ}{dP} = -5 - 2.(10) = -25$$

Selanjutnya, carilah tingkat output (Q) apabila $P = 10$

$$Q = 650 - 5.(10) - 10^2 = 500$$

Dengan substitusi nilai– nilai ini dalam rumus elastisitas,

$$\in = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -25.\left(\frac{10}{500}\right) = -0{,}5$$

2.7 Rangkuman

Tingkat perubahan rata–rata $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ untuk suatu fungsi linear adalah konstan, dan sama dengan kemiringannya. Sebaliknya, tingkat perubahan rata–rata untuk suatu fungsi kurvilinier berubah– ubah menurut gerakan berurutan sepanjang kurva. Jadi, kemiringan suatu fungsi kurvilinier tidak konstan, ia berbeda pada titik yang berbeda sepanjang titik tertentu adalah sama dengan kemiringan garis yang ditarik menyinggung kurva (tangen) pada titik itu.

Turunan mengukur tingkat perubahan seketika dari suatu fungsi, yaitu bagaimana variabel tak bebas berubah sehubungan dengan suatu perubahan unit yang sangat kecil dalam variabel bebas. Terminologi yang formal untuk turunan adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{limit}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Diferensiasi adalah proses penentuan turunan dari suatu fungsi, yaitu mencari perubahan *y* berkenaan dengan suatu perubahan *x* apabila perubahan *x* (Δx) mendekati nol. Ini tidak melibatkan sesuatu yang rumit selain sekedar penerapan beberapa rumus atau kaidah dasar pada fungsi. Dalam menerangkan kaidah– kaidah ini, umumnya pakai fungsi pembantu seperti *u* dan *v*, dimana *u* adalah suatu fungsi *x*, *u*(*x*) yang tidak bersifat spesifik dan *v* adalah suatu fungsi *x*, *v*(*x*) yang tidak bersifat spesifik.
Kaidah Fungsi Konstan. Turunan fungsi konstanta, y = k, dimana *k* adalah suatu konstanta, adalah nol.

1. Kaidah Fungsi Linier

Turunan fungsi linier, $y = a + bx$, adalah sama dengan *b*, koefisien dari x.

Misalnya $y = a + bx$ maka $\frac{dy}{dx} = b$

2. Kaidah Fungsi Pangkat

Turunan fungsi pangkat, $y = ax^p$, adalah sama dengan eksponen p kali dengan koefisien *a*, dikalikan dengan variabel *x* dipangkatkan dengan $(p-1)$.

Misalnya $y = ax^p$ maka $\frac{dy}{dx} = pax^{p-1}$

3. Kaidah untuk Penjumlahan dan Pengurangan

Turunan suatu bentuk penjumlahan, $y = u(x) + v(x)$ adalah sama dengan jumlah dari turunan - turunan fungsi *individual*. Turunan suatu bentuk pengurangan, $y = u(x) - v(x)$ adalah sama dengan pengurangan dari turunan - turunan fungsi *individual*.

Misalnya $y = u(x) \pm v(x)$ maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

4. Kaidah Perkalian

Turunan suatu bentuk perkalian, $y = u(x).v(x)$ adalah sama dengan fungsi pertama dikalikan dengan turunan fungsi yang kedua ditambah fungsi kedua dikalikan dengan turunan fungsi yang pertama.

Misalnya $y = u(x).v(x)$ maka $\dfrac{dy}{dx} = u.\dfrac{dv}{dx} + v.\dfrac{du}{dx}$

5. Kaidah Hasil Bagi

Turunan bentuk hasil bagi, $y = \dfrac{u}{v}$ adalah sama dengan penyebut kali turunan dari pembilang, dikurangi pembilang kali turunan penyebut, semuanya dibagi dengan penyebut yang dikuadratkan.

Misalnya $y = \dfrac{u}{v}$ maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v.\left(\dfrac{du}{dx}\right) - u.\left(\dfrac{dv}{dx}\right)}{v^2}$

Urutan dalam pembilang dari rumus adalah penting dan tidak dapat dibalik.

6. Kaidah untuk Fungsi dari Fungsi

Turunan $\dfrac{dy}{dx}$ fungsi dari fungsi $y = f(u)$, dimana $u = g(x)$, adalah sama dengan turunan fungsi pertama berkenaan dengan *u* dikalikan dengan turunan fungsi kedua berkenaan dengan *x*. Ini disebut ***kaidah berantai (chain rule).***

Misalnya $y = f(u),\ u = g(x)$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$

Turunan kedua $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$ mengukur tingkat perubahan turunan pertama ($\frac{dy}{dx}$) mengukur fungsi asal atau fungsi primitif (*primitive function*). Turunan ketiga $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)$ mengukur tingkat perubahan turunan kedua dan seterusnya. Turunan yang lebih tinggi didapatkan secara sederhana dengan menerapkan kaidah diferensiasi pada turunan sebelumnya.

2.8 Latihan

Kemiringan dan turunan

Untuk setiap fungsi berikut tentukanlah nilai kemiringan pada $x = 2$ dan $x = 5$

1. $y = 7x^2 + 3$
2. $y = 2x^2 - 2x$
3. $y = 30 + 6x$
4. $y = -x^3 + 4x - 3$

Turunan yang sederhana.

Tentukanlah diferensial fungsi– fungsi berikut:

5. $y = 100$
6. $y = 5x + 12$
7. $y = 5x^3$
8. $y = 2x^5 + 3x^3 - 5x + 12$
9. $z = -8t^5 - 5t^4 - 2$
10. $p = -3q^2 + 7q - 15$

11. $\frac{d}{du}\left(4u^7 - 3u^6\right)$
12. $\frac{d}{ds}\left(4s^7 - 3s^6 + 4s^2 + 5\right)$

Kaidah Perkalian

Tentukanlah turunan dari fungsi– fungsi berikut menggunakan kaidah perkalian:

13. $y = 5x^4.(3x - 7)$
14. $y = \left(x^8 + 8\right).\left(x^6 + 11\right)$
15. $y = \left(4x^2 - 3\right).\left(2x^5\right)$
16. $y = 7x^9.\left(3x^2 - 12\right)$
17. $y = \left(2x^4 + 5\right).\left(3x^5 - 8\right)$
18. $z = \left(3 - 12t^3\right).\left(5 + 4t^6\right)$

Kaidah Hasil Bagi

Tentukanlah turunan dari fungsi– fungsi berikut menggunakan kaidah hasil bagi:

19. $y = \frac{\left(10x^8 - 6x^7\right)}{2x}$
20. $y = \frac{\left(3x^8 - 4x^7\right)}{4x^3}$
21. $y = \frac{4x^5}{1 - 3x}$
22. $y = \frac{15x^2}{2x^2 + 7x - 3}$
23. $y = \frac{6x - 7}{8x - 5}$
24. $y = \frac{5x^2 - 9x + 8}{x^2 + 1}$

Kaidah Berantai

Tentukan turunan fungsi dari fungsi berikut ini menggunakan kaidah berantai.

25. $y=(7x+9)^2$
26. $y=(5x-7)^3$
27. $y=(4x^2-1)^7$
28. $y=(x^2+3x-1)^5$

Kombinasi Kaidah

Tentukanlah turunan dari:

29. $y=3x.(2x-1).(3x-2)$
30. $y=3x.(4x-5)^2$
31. $y=\dfrac{(8x-5)^2}{(7x+4)}$
32. $y=(5x-1).(3x+4)^3$

Turunan Orde yang Lebih Tinggi

Untuk setiap fungsi berikut, carilah turunan orde kedua, lakukan evaluasi terhadapnya pada $x=2$.

33. $y=7x^3+5x^2+12$
34. $f(x)=x^6+3x^4+x$
35. $f(x)=(x^4-3).(x^3-2)$
36. $y=(2x+3).(8x^2-6)$
37. $y=\dfrac{5x}{1-3x}$
38. $y=\dfrac{7x^2}{x-1}$
39. $f(x)=(8x-4)^3$

Selidiki turunan– turunan yang berurutan dan hitunglah turunan– turunan tersebut pada $x = 3$.

40. $y = x^3 + 3x^2 + 9x - 7$
41. $y = (4x - 7).(9x + 2)$
42. $y = (5 - x)^4$

Penerapan Turunan dalam Ilmu Ekonomi

43. Tentukanlah persamaan garis singgung dan garis normal kurva $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ di titik $(2{,}5)$.
44. Tentukanlah titik belok pada grafik fungsi $y = 3x^5 - 5x^4 + x + 4$.
45. Carilah fungsi– fungsi MR yang berhubungan dengan setiap fungsi penawaran berikut. Hitunglah fungsi– fungsi tersebut pada $Q = 4$ dan $Q = 10$

    i. $P = Q^2 + 2Q + 1$

    ii. $P = Q^2 + 0{,}5Q + 3$

BAB III

INTEGRAL

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami:

3.1 Integral Tak Tentu (*Indefinite Integral*)

3.2 Integral Tertentu (*Definite Integral*)

3.1 Integral Tak Tentu (*Indefinite Integral*)

1. Pengintegralan

Proses membalik pendeferensialan dan mencari fungsi $F(x)$ yang tingkat perubahannya (yaitu turunan $f(x)$) telah diketahui, disebut ***pengintegralan***. Fungsi $F(x)$ diistilahkan ***integral*** atau ***anti turunan (anti derivatif)*** dari fungsi $f(x)$.

<u>Contoh:</u>
Integral suatu fungsi $f(x)$ secara matematis dinyatakan dengan

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Di sini, sisi kiri persamaan dibaca dengan "integral *f* dari *x* berkenaan dengan *x*". Lambang $\int$ adalah ***tanda integral***, $f(x)$ adalah ***integran***, ***c*** adalah ***konstanta pengintegralan***, dan $F(x) + c$ adalah suatu ***integral tak tentu***.

2. Kaidah Pengintegralan

Kaidah–kaidah pengintegralan berikut ini diperoleh dengan membalikkan kaidah aturan pendeferensialan yang sebanding.

1) Integral dari suatu konstanta *k* adalah

$$\int k dx = kx + c$$

<u>Contoh:</u>

1. $\int 5dx = 5x + c$
2. $\int 150dx = 150x + c$
3. $\int 1000dx = 1000x + c$

2) Integral sebanyak *dx,* adalah

$$\int dx = x + c$$

3) Integral dari suatu fungsi pangkat x^n, dimana $n \neq -1$, dinyatakan dengan kaidah pangkat:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

<u>Contoh:</u>

1. $\int x^5 dx = \frac{1}{5+1} x^{5+1} + c$

   $\int x^5 dx = \frac{1}{6} x^6 + c$

2. $\int x^{10} dx = \frac{1}{10+1} x^{10+1} + c$

   $\int x^{10} dx = \frac{1}{11} x^{11} + c$

3. $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c$

   $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3/2} x^{\frac{1}{2}+1} + c$

   $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

4) Integral dari $x^{-1} \left(\text{atau } \frac{1}{x} \right)$ adalah:

$$\int x^{-1} dx = \ln x + c \qquad x > 0$$

Syarat $x > 0$ ditambahkan karena hanya bilangan positif yang mempunyai logaritma. Untuk bilangan negatif,

$$\int x^{-1}dx = \ln|x| + c \qquad x \neq 0$$

Contoh:

1. $\int 100x^{-1}dx = 100\ln|x| + c$
2. $\int 1500x^{-1}dx = 1500\ln|x| + c$

5) Integral dari suatu fungsi eksponen adalah

$$\int a^{kx}dx = \frac{a^{kx}}{k \ln a} + c$$

Contoh:

1. $\int 2^{3x}\,dx = \dfrac{2^{3x}}{3\ln 2} + c$
2. $\int 5^{2x}\,dx = \dfrac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$
3. $\int 3^{2x}\,dx = \dfrac{3^{2x}}{2\ln 3} + c$

6) Integral dari suatu fungsi eksponensial natural adalah

$$\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k} + c \text{ karena } \ln e = 1$$

Contoh:

$$\int 9e^{-3x}dx = \frac{9e^{-3x}}{-3} + c$$

7) Integral dari suatu konstanta dikalikan suatu fungsi sama dengan konstanta dikalikan integral fungsi tersebut.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

<u>Contoh:</u>

$$\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx = \frac{5}{5}x^5 + c$$

8) Integral jumlah atau selisih dari dua atau lebih fungsi sama dengan jumlah atau selisih dari integral– integralnya.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

9) Integral dari negatif suatu fungsi sama dengan negatif dari integral fungsi tersebut.

$$\int - f(x)dx = -\int f(x)dx$$

3. Syarat Awal dan Syarat Pembatas

Syarat Awal (*initial condition*) $(y = y_0$ bila $x = 0)$ atau *Syarat Pembatas* (*boundary condition*) $(y = y_0$ apabila $x = x_0)$ diketahui secara unik menentukan konstanta pengintegralan. Dengan memungkinkan penentuan unik atas *c*, syarat awal atau syarat pembatas memilih suatu kurva tertentu.

<u>Contoh:</u>

Misal diketahui syarat pembatas $y = 11$ bila $x = 3$,

Maka:

Integral $y = \int 2dx = 2x + c$ dievaluasi sebagai berikut:

Dengan substitusi $y = 11$ bila $x = 3$,

$$11 = 2(3) + c$$
$$c = 5$$

4. Pengintegralan dengan Substitusi

Pengintegralan suatu hasil kali atau hasil bagi dari dua fungsi *x* yang dapat dideferensialkan, seperti

$$\int 12x^2\left(x^3+2\right)dx$$

Tidak dapat dilakukan memakai kaidah– kaidah di atas secara langsung. Akan tetapi, jika integran dapat dinyatakan sebagai suatu kelipatan *konstanta* dari fungsi lainnya, *u*, dan turunannya $\frac{du}{dx}$, pengintegralan dengan substitusi adalah mungkin. Dengan menyatakan integran $f(x)$ sebagai suatu fungsi u dan turunannya $\frac{du}{dx}$, dan dengan pengintegralan berkenaan dengan *x*,

$$\int f(x)dx = \int\left(u\frac{du}{dx}\right)dx$$

Dengan menghapuskan dx,

$$\int f(x)dx = \int udu = F(u) + c$$

Contoh:

Tentukan $\int 12x^2(x^3+2)dx$.

Penyelesaian:

Misal:

$$u = x^3 + 2$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

Maka:

$$\int 12x^2(x^3+2)dx = \int 12x^2u\,\frac{du}{3x^2} = \int 4udu = \frac{4}{2}u^2 + c = 2u^2 + c$$

Substitusikan $u = x^3 + 2,$ jadi,

$$\int 12x^2(x^3+2)dx = 2u^2 + c = 2(x^3+2)^2 + c\ .$$

Contoh:

Tentukan $\int 4x(x+1)^3\,dx.$

Penyelesaian:

Misal:

$$u = x+1$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$dx = du$$

Maka:

$$\int 4x(x+1)^3\,dx = \int 4xu^3du$$

Karena x merupakan suatu kelipatan variabel (*variabel multiple*) yang tidak dapat difaktorkan keluar, integran tersebut tidak dapat diubah bentuknya menjadi kelipatan konstanta $u\frac{du}{dx}$. Karena metode substitusi tidak bisa dipakai untuk menyelesaikan soal seperti ini.

5. Pengintegralan per Bagian

Jika suatu integran merupakan hasil kali atau hasil bagi dari fungsi–fungsi x yang dapat dideferensialkan dan tidak dapat dinyatakan sebagai suatu kelipatan konstanta dari $u\frac{du}{dx}$, pengintegralan per bagian (*integration by parts*) seringkali bermanfaat. Metode tersebut diperoleh dengan membalik proses pendeferensialan suatu hasil kali. Jika dari kaidah untuk bentuk perkalian

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f(x).g'(x) + .g(x)f'(x)$$

Pengambilan integral turunan tersebut memberikan:

$$f(x).g(x) = \int f(x).g'(x)dx + .\int g(x)f'(x)dx$$

Kemudian penyelesaian integral pertama di sebelah kanan

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - .\int g(x)f'(x)dx$$

<u>Contoh:</u>

Tentukan $\int 4x(x+1)^3\,dx.$

Penyelesaian:

Misalkan:

$$f(x) = 4x \Rightarrow f'(x) = 4$$
$$g'(x) = (x+1)^3 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{4}(x+1)^4 + c$$

Substitusikan nilai $f(x),\ f'(x),\ g(x)$

$$\int 4x(x+1)^3 dx = f(x).g(x) - .\int g(x)f'(x)dx = 4x.\left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right] - \int \frac{1}{4}(x+1)^4.4dx$$
$$= x.(x+1)^4 - \frac{1}{5}(x+1)^5 + c$$

Penerapan dalam Ekonomi

Investasi bersih I didefinisikan sebagai tingkat perubahan dalam formasi saham modal (*capital stock formation*) K selama waktu t. Jika proses formasi atau pembentukan modal berlangsung terus sepanjang waktu, $I(t) = \dfrac{dK(t)}{dt} = K'(t)$

Dari tingkat investasi, tingkat satuan modal dapat diperkirakan. Pembentukan modal merupakan integral berkenaan dengan waktu investasi bersih.

$$K_t = \int I(t)dt = K(t) + c = K(t) + K_0$$

Dimana c= saham modal awal K_0.

Demikian pula, integral digunakan untuk memprakirakan biaya total dari biaya marginal. Karena biaya marginal adalah perubahan dalam biaya total akibat perubahan incremental dalam output, $MC = \frac{dTC}{dQ}$, dan hanya biaya– biaya variabel yang berubah bersamaan dengan tingkat output,

$$TC = \int MCdQ = VC + c = VC + FC$$

Karena c = biaya tetap atau biaya awal FC. Analisis ekonomi yang menelusuri variabel– variabel lintasan waktu atau berusaha untuk menentukan apakah variabel– variabel akan bertemu menuju keseimbangan sepanjang waktu, disebut *dinamika*.

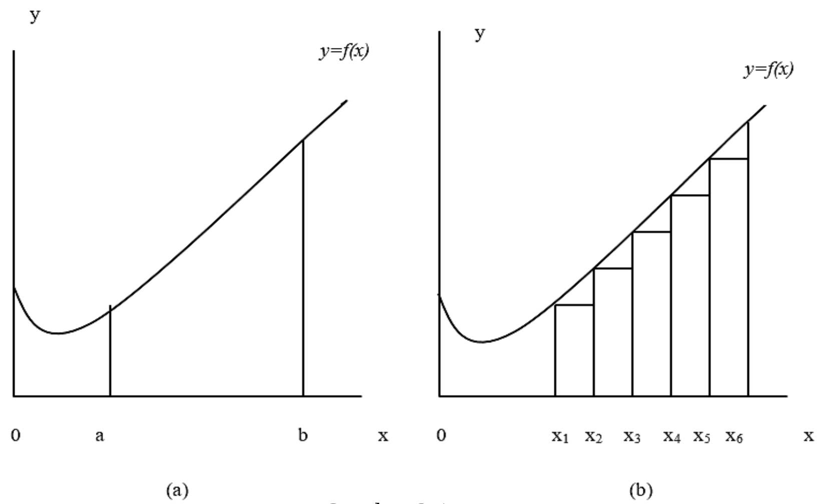
3.2 Integral Tertentu (*Definite Integral*)

1. Bidang di Bawah Kurva

Tidak ada rumus geometri untuk bidang di bawah suatu kurva yang bentuknya tidak beraturan (*irregular*), seperti $y = f(x)$ antara $x = a$ dan $x = b$ dalam gambar 3.1(b). Jika interval $[a, b]$ dibagi menjadi n subinterval $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ dan seterusnya, dan persegi– persegi panjang dibangun sedemikian rupa sehingga tinggi masing– masing adalah sama dengan nilai terkecil fungsi tersebut dalam sub - interval, seperti dalam gambar 3.1(b), maka jumlah luas bidang persegi panjang– persegi panjang $\sum_{i=i}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ akan mendekati, tetapi, kurang dari luas yang sebenarnya dari bidang di bawah kurva. Jika jumlah sub– interval ditambah sehingga $n \to \infty$, masing– masing sub– interval bidang menjadi sangat kecil $(\Delta x_i = dx_i = dx)$ dan luas bidang kurva A dapat dinyatakan secara matematis sebagai

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_1)\Delta x_1 = \int_a^b f(x)dx$$

Dimana lambang integral $\int$ menggantikan $\sum$ karena $\sum$ secara layak menunjukkan penjumlahan unsur– unsur yang banyaknya terhingga.



Gambar 3.1

2. Integral Tertentu

Integral tertentu suatu fungsi kontinu $f(x)$ pada interval a sampai b $(a < b)$ secara matematis dinyatakan sebagai $\int_a^b f(x)dx$ yang dapat dibaca "integral dari *a* sampai *b* dari *f* dari *xdx*." *a* dikatakan *limit bawah* (*lower limit*) pengintegralan, *b limit atas* (*upper limit*) pengintegralan.

3. Dalil Dasar Kalkulus

Dalil dasar kalkulus (*fundamental theorem of calculus*) menyatakan bahwa nilai bilangan integral tertentu dari fungsi kontinu $f(x)$ pada interval *a* sampai *b* ditunjukkan integral tak tentu $F(x)+c$ yang dievaluasi pada limit atas pengintegralan *b*, dikurangi integral tak tentu yang sama dengan $F(x)+c$, yang dievaluasi pada limit bawah pengintegralan *a*. Karena *c* adalah sama untuk keduanya, konstanta pengintegralan dihilangkan dalam pengurangan. Apabila dinyatakan secara matematis,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>Contoh:</u>

Tentukan Integral dari:

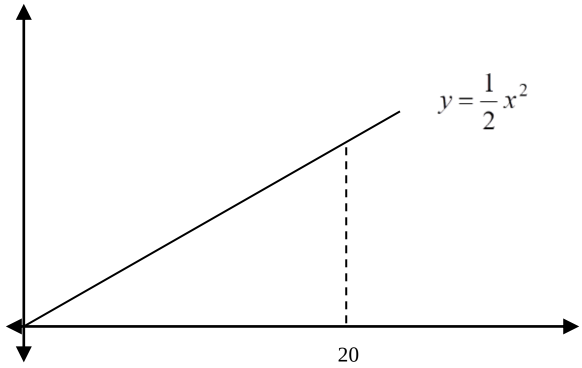
- $\int_2^5 10x\,dx$
- $\int_1^3 5x^2\,dx$

Penyelesaian:

- $\int_2^5 10x\,dx = 5x^2\Big|_1^5 = 5(5^2) - 5.(2^2) = 125 - 20 = 105$
- $\int_1^3 5x^2\,dx = \frac{5}{3}x^3\Big|_1^3 = \frac{5}{3}(3^3) - \frac{5}{3}.(1^3) = 45 - \frac{5}{3} = 42\frac{1}{3}$

<u>Contoh:</u>

Integral Tertentu digunakan di bawah ini untuk menentukan luas bidang di bawah kurva dalam gambar……. Pada interval 0– 20 sebagai berikut:



$$A=\int_0^{20}\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{4}x^2\Big|_0^{20}=\frac{1}{4}(20)^2-\frac{1}{4}(0)^2=100$$

4. Sifat–Sifat Integral Tertentu

a. Pembalikan susunan limit akan mengubah tanda dari integral tertentu.

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

b. Jika limit atas pengintegralan sama dengan limit bawahnya, nilai dari integral tertentu adalah nol.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=0$$

c. Integral tertentu dapat dinyatakan sebagai jumlah dari beberapa sub–integral komponen.

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx \qquad a\le b\le c$$

<u>Contoh:</u>

Untuk menjelaskan sifat– sifat yang disajikan di atas, integral– integral tertentu dievaluasi sebagai berikut:

- $$\int_2^5 10x dx = -\int_5^2 10x dx$$

  $$\int_2^5 10x dx = 5x^2\Big|_1^5 = 5(5^2) - 5.(2^2) = 125 - 20 = 105$$

  Pengecekan jawaban ini

  $$\int_5^2 10x dx = 5x^2\Big|_5^2 = 5(2^2) - 5.(5^2) = 20 - 125 = -105$$

- $$\int_3^3 5x^2 dx = 0$$

  Pengecekan jawaban ini

  $$\int_3^3 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3\Big|_1^3 = \frac{5}{3}(3^3) - \frac{5}{3}.(3^3) = 45 - 45 = 0$$

- $$\int_2^5 10x dx = \int_2^4 10x dx + \int_4^5 10x dx$$

  $$\int_2^5 10x dx = 5(5^2) - 5.(2^2) = 125 - 20 = 105$$

  $$\int_2^4 10x dx = 5(4^2) - 5.(2^2) = 80 - 20 = 60$$

  $$\int_4^5 10x dx = 5(5^2) - 5.(4^2) = 125 - 80 = 45$$

  Pengecekan jawaban ini

  105=60+45

3.3 Rangkuman

Proses membalik pendeferensialan dan mencari fungsi $F(x)$ yang tingkat perubahannya (yaitu turunan $f(x)$) telah diketahui, disebut ***pengintegralan***. Fungsi $F(x)$ diistilahkan ***integral*** atau ***anti turunan (anti derivatif)*** dari fungsi $f(x)$

Kaidah– kaidah pengintegralan berikut ini diperoleh dengan membalikkan kaidah aturan pendeferensialan yang sebanding.

1) Integral dari suatu konstanta *k* adalah $\int k\,dx = kx + c$
2) Integral sebanyak *dx*, adalah $\int dx = x + c$
3) Integral dari suatu fungsi pangkat x^n, dimana $n \neq -1$, dinyatakan dengan kaidah pangkat: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \;\; n \neq -1$
4) Integral dari x^{-1} $\left(\text{atau } \frac{1}{x}\right)$ adalah $\int x^{-1}dx = \ln x + c \;\; x > 0$

   Syarat $x > 0$ ditambahkan karena hanya bilangan positif yang mempunyai logaritma. Untuk bilangan negatif, $\int x^{-1}dx = \ln|x| + c$ $x \neq 0$
5) Integral dari suatu fungsi eksponen adalah $\int a^{kx}dx = \frac{a^{kx}}{k \ln a} + c$
6) Integral dari suatu fungsi eksponensial natural adalah $\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$ karena $\ln e = 1$
7) Integral dari suatu konstanta dikalikan suatu fungsi sama dengan konstanta dikalikan integral fungsi tersebut. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
8) Integral jumlah atau selisih dari dua atau lebih fungsi sama dengan jumlah atau selisih dari integral–integralnya. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

9) Integral dari negatif suatu fungsi sama dengan negatif dari integral fungsi tersebut. $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

3.4 Latihan

Integral Tak Tentu

1. $\int 1000dx$
2. $\int 15dx$
3. $\int 1500dx$
4. $\int 1000000dx$
5. $\int 1000x^5 dx$
6. $\int 4x^3 dx$
7. $\int 1000x^{\frac{1}{2}} dx$
8. $\int 10x^{\frac{2}{5}} dx$
9. $\int \frac{dx}{x}$
10. $\int 5x^{-1} dx$
11. $\int \frac{1}{3x} dx$
12. $\int \frac{dx}{x^4}$
13. $\int (100x^4 + 15x^2 + 10)dx$
14. $\int (10x^9 + 15x^2 + 4)dx$

15. $\int \left(1500x^4 + 150x^2 + 1000\right) dx$

Pengintegralan dengan Substitusi

16. $\int 10x(x^2 + 3)^4 \, dx.$
17. $\int x^4 (2x^5 - 5)^4 \, dx.$
18. $\int (x-9)^{\frac{7}{4}} \, dx.$
19. $\int (6x - 11)^{-5} \, dx.$
20. $\int \frac{x^2}{\left(4x^3 + 7\right)^2} \, dx$
21. $\int \frac{6x^2 + 4x + 10}{\left(x^3 + x^2 + 5x\right)^3} \, dx$
22. $\int \frac{dx}{9x - 5}$
23. $\int \frac{3x^2 + 2}{4x^3 + 8x} \, dx$

Integral Per Bagian

24. $\int 15x\left(x+4\right)^{3/2} dx$
25. $\int \frac{2x}{\left(x-8\right)^3} dx$
26. $\int \frac{5x}{\left(x-1\right)^2} dx$

Integral Tertentu

27. $\int_1^3 5x^4 \, dx$

28. $\int_{1}^{3} 150x^4 dx$

29. $\int_{1}^{3} 5x^4 dx$

30. $\int_{1}^{3} 5x^4 dx$

BAB IV

PROGRAM LINEAR

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami:

4.1 Pengertian Sistem Persamaan Linear (SPL)
4.2 Sistem Persamaan Linear Homogen
4.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL)
4.4 Program Linier

4.1 Pengertian Sistem Persamaan Linear (SPL)

Dalam bagian ini kita akan mengetahui istilah dasar dan kita bahas sebuah metode untuk memecahkan sistem– sistem persamaan linear.

Sebuah garis dalam bidang *xy* secara aljabar dapat dinyatakan oleh persamaan berbentuk

$$a1x + a2y = b$$

Persamaan semacam ini kita namakan persamaan linear dalam peubah (variabel) *x* dan peubah *y*. Secara lebih umum kita mendefinisikan *persamaan linear* dalam *n* peubah *x1,x2, ..., xn* sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a1x1 + a2x2 + \ldots + an\, xn = b.$$

dimana *a1,a2, ..., an* dan *b* adalah konstanta– konstanta riil.

<u>Contoh:</u>

Persamaan– persamaan linear:

$$x + 4y = 10$$
$$y = \frac{1}{2}x + 2z + 5$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$$

Perhatikan bahwa persamaan linier tidak melibatkan suatu hasil kali atau akar peubah. Semua peubah hanya terdapat sampai angka pertama dan tidak muncul sebagai argumen untuk fungsi trigonometrik, fungsi logaritmik, atau untuk fungsi eksponensial. Berikut ini contoh yang *bukan persamaan linear.*

$$x + 4y^2 = 10$$
$$y = \frac{1}{2}\sin x + 2z + 5$$
$$\sqrt{x_1} - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 + x_1x_2 = 1$$

Pemecahan persamaan linear *a1x1 + a2x2 + ... + an xn = b* adalah urutan dari *n* bilangan *s1,s2, ..., sn* sehingga persamaan tersebut dipenuhi bila kita mensubstitusikannya terhadap *x1 = s1, x2 = s2, ..., xn = sn.* Himpunan semua pemecahan persamaan tersebut dinamakan *himpunan pemecahannya.*

Contoh:
Carilah himpunan pemecahan masing– masing persamaan berikut:

1. 4x– 2y = 1
2. x1– 4x2 + 7x3 =5

Untuk mencari pemecahan (1), maka kita dapat menetapkan sebarang nilai untuk *x* dan memecahkan persamaan tersebut untuk mencari *y*, atau kita dapat memilih sebarang nilai untuk *y* dan memecahkan persamaan tersebut untuk mencari *x*. Jika kita ikuti pendekatan pertama dan menetapkan nilai *t* untuk *x*, maka kita dapatkan

$$x = t, \quad y = 2t - 1/2$$

Rumus– rumus ini menggambarkan himpunan pemecahan tersebut dalam sebarang parameter *t* .Pemecahan numerik khusus dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai spesifik untuk *t* . Misalnya, *t = 3* menghasilkan pemecahan *x=3, y=11/2* dan *t = -1/2* menghasilkan pemecahan *x=-1/2,y=-3/2.*

Jika kita ikuti pendekatan kedua dan menetapkan nilai sebarang *t* tersebut untuk *y*, maka kita dapatkan

$$x = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}, y = t$$

Walaupun rumus– rumus ini berbeda dari rumus– rumus yang kita peroleh di atas, namun rumus– rumus ini menghasilkan himpunan pemecahan yang sama jika *t* berubah pada semua bilangan riil yang mungkin.

Untuk mencari himpunan pemecahan persamaan (2) kita dapat menetapkan sebarang nilai untuk setiap dua peubah dan memecahkan persamaan tersebut untuk mencari peubah ketiga. Khususnya jika kita menetapkan nilai sebarang s dan t berturut– turut untuk nilai $x2$ dan $x3$ dan memecahkan persamaan tersebut untuk mencari $x1$, maka kita peroleh

$$x1 = 5 + 4s - 7t, \quad x2 = s, \quad x3 = t$$

Sebuah himpunan berhingga dari persamaan– persamaan linear dalam peubah $x1, x2, \ldots, xn$ dinamakan *sistem persamaan linear* . Sebuah urutan bilangan–bilangan $s1, s2, \ldots, sn$ dinamakan *pemecahan* dari sistem tersebut jika $x1 = s1, x2 = s2, \ldots, xn = sn$ adalah pemecahan masing–masing persamaan tersebut . Misalnya sistem

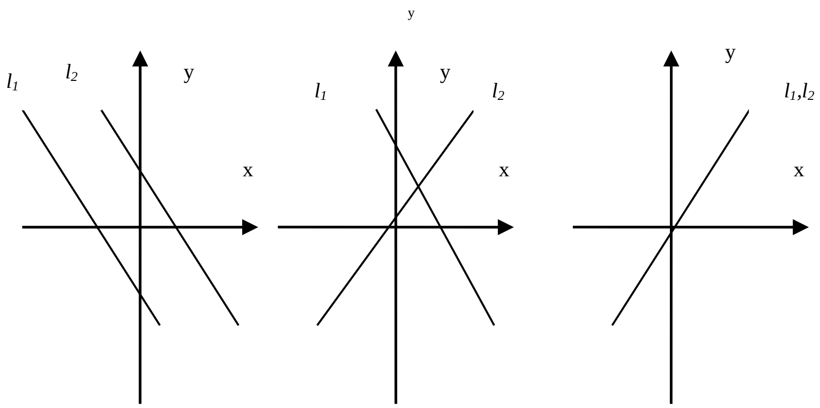
$$4x1 - x2 + 3x3 = -1$$
$$3x1 + x2 + 9x3 = -4$$

Mempunyai pemecahan $x1 = 1$, $x2 = 2$, $x3 = -1$ karena nilai– nilai ini memenuhi kedua persamaan tersebut. Akan tetapi $x1 = 1$, $x2 = 8$, $x3 = 1$ bukanlah sebuah pemecahan karena nilai– nilai ini hanya memenuhi persamaan pertama dari kedua persamaan dalam sistem tersebut.

Sebuah sistem persamaan yang tidak mempunyai pemecahan dikatakan *takkonsisten* (*inconsistent).* Jika ada setidak– tidaknya satu pemecahan, maka sistem persamaan tersebut dinamakan *konsisten (consistent)* . Untuk melukiskan kemungkinan– kemungkinan yang dapat terjadi dalam memecahkan sistem persamaan linear, tinjaulah sistem umum dari dua persamaan linear dalam bilangan–bilangan yang tak diketahui x dan y:

$$a1x + b1y = c1 \quad (a1, b1 \text{ kedua– duanya tidak nol})$$
$$a2x + b2y = c2 \quad (a2, b1 \text{ kedua– duanya tidak nol})$$

Grafik persamaan– persamaan ini merupakan garis– garis, kita beri nama garis– garis tersebut $l1$ dan $l2$. Karena titik (x,y) terletak pada sebuah garis jika dan hanya jika bilangan–bilangan x dan y memenuhi persamaan garis tersebut, maka pemecahan sistem persamaan tersebut akan bersesuaian dengan titik perpotongan dari garis $l1$ dan $l2$.. Ada tiga kemungkinan (gambar).



(1) (2) (3)

1. Garis *l1* mungkin sejajar dengan garis *l2*, dalam kasus tidak ada perpotongannya, dan sebagai konsekuensinya maka tidak ada pemecahan untuk sistem tersebut.
2. Garis *l1* mungkin berpotongan dengan garis *l2* di hanya satu titik, dalam kasus ini maka sistem tersebut hanya mempunyai satu pemecahan.
3. Garis *l1* mungkin berimpit dengan garis *l2*, dalam kasus ini tak terhingga banyaknya titik perpotongan, maka sebagai konsekuensinya maka tak terhingga banyaknya pemecahan untuk sistem tersebut.

Walaupun kita di sini hanya meninjau dua persamaan dengan dua bilangan yang tak diketahui, namun akan kita perhatikan kelak bahwa hasil yang sama ini berlaku untuk sebarang sistem; *yakni sistem persamaan linear tidak mempunyai pemecahan, atau mempunyai persis satu pemecahan, atau mempunyai tak terhingga banyaknya pemecahan.*

Sebuah sistem sebarang yang terdiri dari *m* persamaan linear dengan *n* bilangan tak diketahui akan ditulis sebagai:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

dimana *x1,x2, ..., xn* adalah bilangan–bilangan tak diketahui sedangkan *a* dan *b* menyatakan konstanta– konstanta.

Misalnya, sebuah sistem umum yang terdiri dari tiga persamaan dengan empat bilangan yang tidak diketahui akan kita tulis sebagai

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\
&.a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3
\end{aligned}
$$

4.2 Sistem Persamaan Linear Homogen

Sebuah sistem persamaan– persamaan linear dikatakan *homogen* jika semua suku konstan sama dengan nol; yakni, sistem tersebut mempunyai bentuk:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned}
$$

Tiap–tiap sistem persamaan linear homogen adalah sistem yang konsisten, karena *x1=0 , x,=0, ..., xn=0* selalu merupakan pemecahan. Pemecahan tersebut dinamakan *pemecahan trivial (trivial solution);* jika ada pemecahan lain maka pemecahan tersebut dinamakan *pemecahan tak trivial (non trivial solution).*

Karena sistem persamaan linear homogen harus konsisten, maka terdapat pada pemecahan atau tak terhingga banyaknya pemecahan. Karena salah satu diantara pemecahan ini adalah pemecahan trivial, maka kita dapat membuat pernyataan berikut.

Untuk sistem persamaan– persamaan linear homogen, maka persis salah satu diantara pernyataan berikut benar.

4.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL)

1. Menggunakan Determinan

Sistem persamaan linear di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

sehingga:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

$atau$

$$AX = B$$

Sistem persamaan linear ini dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Matriks *A-1* dapat dicari dari invers matriks *A*. Matriks *X* dapat dicari, apabila matriks *A* nonsingular.

<u>Contoh:</u>

Tentukanlah x_1, x_2, *dan* x_3 dari sistem persamaan:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

maka

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

2. Menggunakan Kaidah Cramer

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \Delta \neq 0$$

dimana:

$\Delta = |A|$ dan

$\Delta_i =$ determinan matriks dengan mengganti kolom ke– I matriks *A* dengan kolom suku konstan.

Contoh:

Tentukanlah *x1*,*x2*,*dan x3* dari sistem persamaan:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$.-2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Penyelesaian:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

maka

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-18}{-6} = 3$$

3. Menggunakan Operasi Baris Elementer

Sistem ini umumnya didapat kan dalam suatu tahapan dengan menerapkan ketiga tipe operasi berikut untuk menghilangkan bilangan–bilangan tak diketahui secara sistematis.

a. Kalikanlah persamaan dengan konstanta yang tak sama dengan nol.
b. Pertukarkanlah dua persamaan tersebut.
c. Tambahkanlah kelipatan dari satu persamaan bagi persamaan yang lainnya.

Karena baris (garis horisontal) dalam matriks yang diperbesar bersesuaian dengan persamaan dalam sistem yang diasosiasikan dengan baris tersebut, maka ketiga operasi ini bersesuaian operasi berikut pada baris matriks yang diperbesar.

a. Kalikanlah sebuah baris dengan konstanta yang tak sama dengan nol.
b. Pertukarkanlah dua baris tersebut.
c. Tambahkanlah kelipatan dari satu baris bagi baris yang lainnya.

4. Menggunakan Eliminasi Gauss

Prosedur tersebut didasarkan pada gagasan untuk mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk yang cukup sederhana sehingga persamaan tersebut dapat kita pecahkan dengan memeriksa sistem tersebut.

Matriks yang dinyatakan dalam bentuk *eselon baris tereduksi (reduced row– echelon form)* memiliki sifat– sifat:

a. Jika baris tidak seluruhnya dari nol, maka bilangan taknol pertama dalam baris tersebut adalah 1. (Kita namakan ini *1 utama*).
b. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama– sama di bawah matriks.
c. Dalam sebarang dua matriks yang berurutan yang seluruhnya tak terdiri dari nol, maka satu utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari satu utama dari baris yang lebih tinggi.
d. Masing– masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Contoh:
Matriks–matriks berada dalam bentuk eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4 Program Linier

Perumusan program Linier dapat dilakukan melalui langkah– langkah:

1. Menentukan aktivitas.
2. Menentukan sumber– sumber atau (masukan).
3. Menentukan kendala– kendala aktivitas.
4. Merumuskan model, yakni membentuk fungsi tujuan dan fungsi–fungsi kendalanya.

Contoh:
Sebuah perusahaan menghasilkan dua macam *keluaran*, yaitu barang A dan barang B. Bahan mentah yang digunakan 2 macam yaitu R dan S sebagai *masukan*. Barang A dan B menggunakan R dan S dalam proses produksinya. Setiap keluaran A memerlukan 4 unit masukan R dan 3 unit masukan S. Sedangkan keluaran B memerlukan 2 unit masukan R dan 4 unit masukan S. Harga jual produk A dan Produk B masing– masing Rp 6.000,- dan Rp 7.500,- per unit. Berapa unit A dan B harus dihasilkan agar penerimaan perusahaan maksimum, dengan keterbatasan atau kendala bahwa penggunaan masukan R dan S masing– masing tidak melebihi 100 unit dan 120 unit?

Penyelesaian:

Tabel Permasalahan

		Keluaran		***Kendala Masukan***
		A	B	
Masukan	R	4	2	100
	S	3	4	120
Kendala Keluaran		6.000	7500	

Masalah program linier yang muncul di sini adalah memaksimumkan fungsi tujuan.

Fungsi tujuan		$Z = 6000x + 7500y$
Fungsi Kendala	:	$4x + 2y \le 100$ $3x + 4y \le 120$
Syarat	:	$x, y \ge 0$

Bentuk Umum Model Program Linier

1. Memaksimumkan fungsi tujuan.

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n$$

Terhadap kendala– kendala

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}$$

Dimana $x_j \ge 0,\ j = 1,2,...n$

2. Meminimumkan fungsi tujuan.

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n$$

Terhadap kendala– kendala

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{array}$$

Dimana $x_j \ge 0,\ j = 1,2,...n$

<u>Contoh:</u>

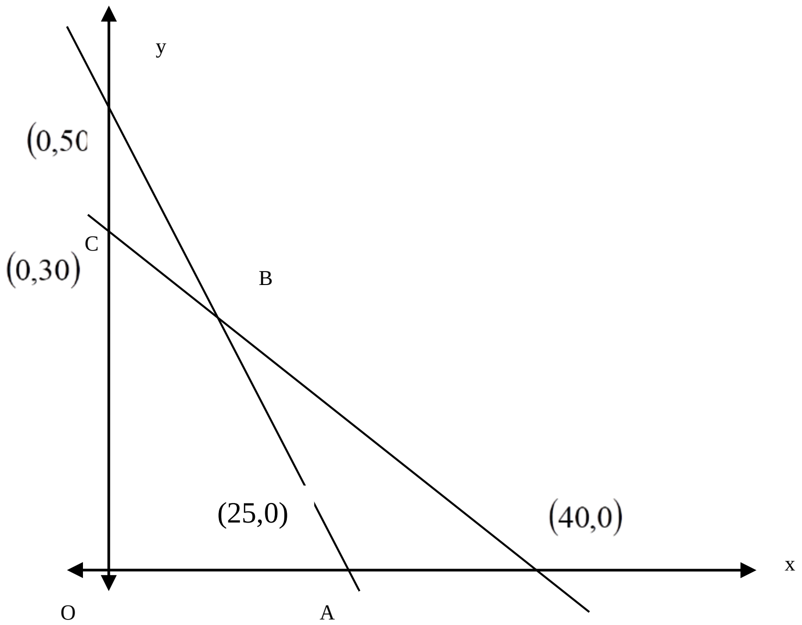
1. Memaksimumkan Fungsi tujuan $Z = 6000x + 7500y$ terhadap

   Fungsi Kendala : $4x + 2y \le 100 \ldots\ldots (\text{i})$
   $3x + 4y \le 120 \ldots\ldots (\text{ii})$

   Syarat : $x, y \ge 0$

Penyelesaian:

Metode grafik.



(i).

X	0	25
Y	50	0

Titik $(0{,}50), (25{,}0)$

(ii).

X	0	40
Y	30	0

Titik $(0{,}30), (40{,}0)$

Titik B $\Rightarrow$ titik potong garis (i) dan (ii)

Menggunakan metode eliminasi diperoleh;

$$\begin{array}{l|l} 4x+2y=100 & \times 2 \\ 3x+4y=120 & \times 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 8x+4y=200 \\ 3x+4y=120 \end{array}\ _{-}$$

$$\begin{aligned} 5x &= 80 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Untuk menentukan nilai *y*, eliminasikan nilai x=16, selanjutnya diperoleh,

$$\begin{aligned} 4x+2y &= 100 \\ 4.16+2y &= 100 \\ 2y &= 100-64 \\ 2y &= 36 \\ y &= 18 \end{aligned}$$

Sehingga titik B (16,18).

Untuk mengetahui titik maksimum dilakukan pengujian terhadap titik– titik sebagai berikut:

Titik	$Z = 6000x + 7500y$
O(0,0)	0
A(25,0)	150.000
B(16,18)	231.000
C(0,30)	225.000

Nilai optimal diperoleh pada titik B. Dengan kombinasi produk sebanyak 16 barang A dan 18 barang B.

2. Sebuah perusahaan memproduksi dua macam barang yaitu A dan B masing– masing menggunakan tiga macam bahan, yaitu K, L, dan M. Setiap unit A memerlukan 3 unit K, 4 unit L, dan 2 unit M. Sedangkan setiap unit B memerlukan 2 unit K, 1 unit L, dan 8 unit M. Biaya total untuk membuat barang A dan B masing– masing Rp

4.500,- dan Rp 5.000,- per unit. Setiap harinya perusahaan dapat menggunakan setidak– tidaknya 60 unit K, 40 unit L, dan 80 unit M. Berapa unit masing– masing barang sebaiknya dibuat agar biaya total harian optimal?

Penyelesaian:

Tabel Permasalahan

		Keluaran		***Kendala Masukan***
		A	B	
Masukan	K	3	2	60
	L	4	1	40
	M	2	8	80
Kendala Keluaran		4500	5000	

Meminimumkan Fungsi tujuan $Z = 4500x + 5000y$ terhadap

Fungsi Kendala : $3x + 4y \geq 60 \ldots\ldots (\text{i})$

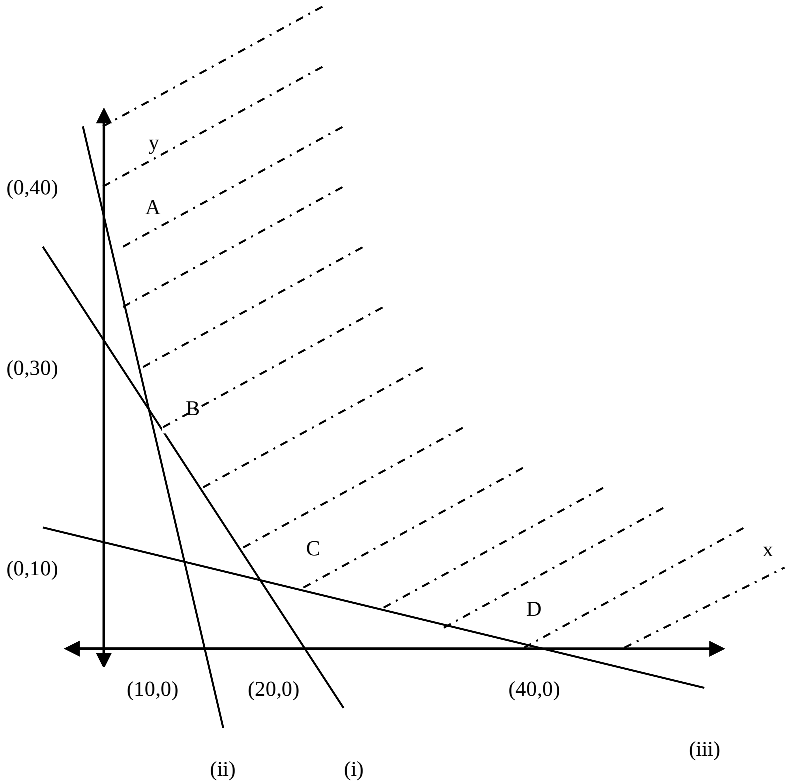
$4x + y \geq 40 \ldots\ldots (\text{ii})$

$2x + 8y \geq 80 \ldots\ldots (\text{iii})$

Syarat : $x, y \geq 0$

Penyelesaian:

Metode grafik.



(i).

X	0	20
Y	30	0

(ii)

X	0	10
Y	40	0

(iii)

X	0	40
Y	10	0

Titik $(0{,}30),(20{,}0)$ Titik $(0{,}40),(10{,}0)$ Titik $(0{,}10),(40{,}0)$

Titik B $\Rightarrow$ titik potong garis (i) dan (ii)

Menggunakan metode eliminasi diperoleh;

$$\begin{array}{l|l} 3x+2y=60 & \times 1 \\ 4x+y=40 & \times 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{||l} 3x+2y=60 \\ 8x+2y=80 \end{array}\,-$$

$$\begin{aligned} -5x &= -20 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Untuk menentukan nilai *y*, eliminasikan nilai x=4, selanjutnya diperoleh,

$$\begin{aligned} 3x+2y &= 60 \\ 3.4+2y &= 60 \\ 2y &= 60-12 \\ 2y &= 48 \\ y &= 24 \end{aligned}$$

Sehingga titik B (4,24).
Titik C $\Rightarrow$ titik potong garis (i) dan (iii)

Menggunakan metode eliminasi diperoleh;

$$\begin{array}{l|l} 3x+2y=60 & \times 2 \\ 2x+8y=80 & \times 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{||l} 6x+4y=120 \\ 6x+24y=240 \end{array}\,-$$

$$\begin{aligned} -20y &= -120 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Untuk menentukan nilai x, eliminasikan nilai y=6, selanjutnya diperoleh,

$$\begin{aligned} 3x+2y &= 60 \\ 3x+2.6 &= 60 \\ 3x &= 60-12 \\ 3x &= 48 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Sehingga titik C (16,6).

Untuk mengetahui titik maksimum dilakukan pengujian terhadap titik– titik sebagai berikut:

Titik	$Z = 4500x + 5000y$
A(0,40)	200.000
B(4,24)	138.000
C(16,6)	102.000
D(40,0)	180.000

Biaya total minimum per– hari diperoleh pada titik C. Dengan kombinasi produk sebanyak 16 barang A dan 6 barang B.

4.5 Rangkuman

Sebuah garis dalam bidang *xy* secara aljabar dapat dinyatakan oleh persamaan berbentuk

$$a1x + a2y = b$$

Persamaan semacam ini kita namakan persamaan linear dalam peubah (variabel) *x* dan peubah *y*. Secara lebih umum kita mendefinisikan *persamaan linear* dalam *n* peubah *x1, x2, ..., xn* sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a1x1 + a2x2 + \ldots + an\, xn = b.$$

dimana *a1,a2, ..., an* dan *b* adalah konstanta– konstanta riil.

Perumusan program linier dapat dilakukan melalui langkah– langkah:

1. Menentukan aktivitas.
2. Menentukan sumber– sumber atau (masukan).
3. Menentukan kendala– kendala aktivitas.
4. Merumuskan model, yakni membentuk fungsi tujuan dan fungsi– fungsi kendalanya.

4.6 Latihan

1. $Z = 3x_1 + 5x_2$; memaksimumkan

   Kendala:

   $2x_1 + 4x_2 \le 10$

   $2x_1 + 2x_2 \le 8$

   $x_1, x_2 \ge 0$

2. $Z = 5x_1 + 3x_2$; memaksimumkan

   Kendala:

   $3x_1 + 5x_2 \le 15$

   $5x_1 + 2x_2 \le 10$

   $x_1, x_2 \ge 0$

3. $Z = 4000x_1 + 1000x_2$; memaksimumkan

   Kendala:

   $10x_1 + 2x_2 \le 300$

   $3x_1 + 2x_2 \le 120$

   $2x_1 + 2x_2 \le 100$

   $x_1, x_2 \ge 0$

BAB V

PERSENTASE, RASIO, DAN PROPORSI

Capaian Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini mahasiswa mampu memahami:

5.1 Persentase
5.2 Pengertian Rasio
5.3 Pengertian Proporsi

5.1 Persentase

Persentase berupa potongan berupa diskon harga atau apapun bentuk potongan yang diberikan biasanya diperuntukkan bagi konsumen agar harga yang ditawarkan dapat menarik perhatian untuk membeli.

5% dari Rp 1.000.000,- $\frac{5}{100} \times Rp1.000.000 = Rp50.000,-$

20% dari Rp 1000.000,- $\frac{20}{100} \times Rp1.000.000 = Rp200.000,-$

40% dari Rp 1000.000,- $\frac{40}{100} \times Rp1.000.000 = Rp400.000,-$

1. Badu membeli baju seharga Rp.125.000,-. Diskon diberikan sebesar 10 %. Berapa rupiah kah yang harus dibayarkan Badu?
2. Pesta diskon diberikan untuk pakaian 15%, makanan 5%, Ani membeli pakaian ps dengan harga masing– masing Rp 75.000,-, Rp 150.000,-, Rp 25.000,-,Rp 100.000,-,Rp 50.000,-
3. 5% dari Rp 1.500.000,-
4. 20% dari Rp 75.000,-
5. 40% dari Rp 750.000,-
6. Potongan harga untuk pembelian kemeja 20 %, celana panjang 25%, celana pendek 10%. Budi membeli 2 kemeja masing– masing seharga Rp80.000,- dan Rp 50.000,- . Celana panjang 1 buah seharga Rp125.000 dan celana pendek 2 buah masing– masing seharga Rp45.000,-. Berapakah rupiah kah yang harus dibayarkan Budi?.

5.2 Pengertian Rasio

Rasio adalah dua bilangan yang dapat dibandingkan menggunakan pembagian.

Contoh:
Tinggi badan Yuli 150 cm dan tinggi badan Yuni 75 cm. Jika kedua tinggi badan tersebut dapat diperbandingkan maka dapat dikatakan tinggi badan Yuli 2 kali tinggi badan Yuni.

Sifat– sifat yang berlaku untuk pembagian, berlaku juga untuk rasio. Sifat– sifat tersebut;

1. Mengalikan rasio dengan suatu bilangan.
   $m.(a \div b) = ma \div b$ atau m
2. Membagi rasio dengan suatu bilangan.
3. Perbandingan tidak berubah, bila kedua sukunya dikalikan atau dibagikan dengan bilangan yang sama.

5.3 Pengertian Proporsi

Proporsi atau perbandingan senilai, adalah beberapa perbandingan yang nilainya sama, atau dua rasio yang sama.

5.4 Rangkuman

Persentase berupa potongan berupa diskon harga atau apapun bentuk potongan yang diberikan biasanya diperuntukkan bagi konsumen agar harga yang ditawarkan dapat menarik perhatian untuk membeli.

Rasio adalah dua bilangan yang dapat dibandingkan menggunakan pembagian.

Proporsi atau perbandingan senilai, adalah beberapa perbandingan yang nilainya sama, atau dua rasio yang sama.

5.5 Latihan

Selesaikanlah soal– soal berikut ini:

1. 25% dari Rp 15.000.000,-
2. 15% dari Rp 10.000.000,-
3. 0,5% dari Rp 12.000.000,-
4. 12,5% dari Rp 11.000.000,-
5. 45% dari Rp 100.000.000,-
6. Potongan harga untuk pembelian kemeja 25 %, celana panjang 25%, celana pendek 12%. Budi membeli 3 kemeja masing–masing seharga Rp80.000,- dan Rp 75.000,- . Celana panjang 1 buah seharga Rp120.000 dan celana pendek 2 buah masing–masing seharga Rp50.000,-. Berapakah rupiah kah yang harus dibayarkan Budi?.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2010. *Elementary Linear Algebra*. Aplications Version. Tenth Edition. UK: Jhon Wiley & Son.

Darma, I Ketut. 2017. *Buku Ajar Matematika Terapan Berbasis Kompetensi*. Yogyakarta: Deepublish.

Dewi, Mutia Lina. 2018. *Matematika Terapan*. Malang: Polinema Press.

Dumairy. 2004. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Cetakan ke 12. Yogyakarta: BPFE.

Huwaida, Hikmayanti. 2017. *Matematika*. Banjarmasin: Penerbit PT Grafika Wangi Kalimantan.

Nababan, M. 2005. *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

R, Wahyu Hidayat dan Jihadi, M. 2016. *Matematika Ekonomi*. Malang: Penerbit Universitas Muhamadiyah Malang.

Rahmi dan Suryani, Mulia. 2016. *Buku Ajar Program Linier*. Yogyakarta: Deepublish.

Riwayati, Hedwigis Esti dan Markonah. 2008. *Matematika Ek. dan Bisnis* 1. Jakarta: Penerbit PT Grasindo.

Wijayanti, Indah Emilia., Wahyuni, Sri., dan Susanti, Yeni. 2018. *Dasar-Dasar Aljabar Linear dan Penggunaannya dalam Berbagai Bidang*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

GLOSARIUM

Akar	:	merupakan suatu operasi aljabar yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah bilangan
Bilangan Irrasional	:	
Bilangan Khayal	:	
Bilangan Kompleks	:	
Bilangan Nyata	:	
Bilangan Pecahan	:	
Bilangan Rasional	:	
Complement	:	himpunan yang beranggotakan obyek–obyek yang tidak dimiliki A
Derivatif	:	
Eliminasi Gauss	:	

Himpunan Bagian	:	jika setiap himpunan A jiga merupakan anggota himpunan B, dengan kata lain $p \in A$ juga $p \in B$,
Himpunan Kosong	:	himpunan yang tidak mempunyai satu anggota pun
Himpunan Universal	:	setiap himpunan tertentu dianggap terdiri dari beberapa himpunan bagian yang masing– masing mempunyai anggota
Himpunan	:	suatu kumpulan atau gugusan dari sejumlah obyek. Obyek–obyek yang mengisi atau membentuk suatu himpunan disebut anggota, atau elemen, atau unsur. Obyek–obyek suatu himpunan sangat bervariasi; bisa berupa orang–orang tertentu, tanam–tanaman tertentu, benda–benda tertentu, dan sebagainya.
Integral	:	
Integral Tak Tentu	:	
Integral Tertentu	:	
Intersection	:	adalah himpunan yang beranggotakan obyek–obyek milik A maupun obyek–obyek milik B
Kaidah Cramer	:	

Operasi Baris Elementer	:	
Pangkat	:	
Pengertian Proporsi	:	
Pengertian Rasio	:	
Persentase	:	
Program Linier	:	
Selisih	:	himpunan yang beranggotakan obyek–obyek milik A yang bukan obyek–obyek milik B
Sistem Persamaan Linear	:	
Sistem Persamaan Linear Homogen	:	
Union	:	himpunan yang beranggotakan obyek–obyek milik A atau obyek–obyek milik *B*

INDEKS

S

U

PROFIL PENULIS

Hikmayanti Huwaida dilahirkan di Banjarmasin tanggal 24 Agustus 1970, anak kedua dari lima bersaudara pasangan Bapak H. Husni Thamrin dan Ibu Hj. Lismiaty. Menikah 14 Nopember 1999 dengan Noor Ifansyah (alm) putera pasangan H. Abdullah Hasan (alm) dengan Hj. Salmah (alm). Dengan satu anak bernama Muhammad Taufiqurrahman.

Riwayat pendidikan dimulai di SD Negeri Mulawarman lulus tahun 1983, SMP Negeri 2 lulus tahun 1986, SMA Negeri 1 lulus tahun 1989, kuliah di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro lulus tahun 1996, dan selanjutnya lulus di Program Magister Manajemen Pendidikan Program Pasca Sarjana Universitas Lambung Mangkurat tahun 2011. Saat ini penulis bekerja sebagai dosen di Jurusan Administrasi Bisnis Politeknik Negeri Banjarmasin. Mata kuliah yang diampu terdiri dari Statistika Bisnis, Matematika Keuangan, Statistika Deskriptif, Kalkulus I, Statistika Probabilitas, Kalkulus II, Aljabar Linier, Teknik Riset Operasional, Matematika I dan Matematika II. Buku ajar yang diterbitkan tahun 2017 berjudul Matematika.

MATEMATIKA BISNIS

HIKMAYANTI HUWAIDA

Matematika merupakan suatu alat analisis yang digunakan dalam berbagai bidang ilmu, salah satunya dalam dunia bisnis. Karena fungsinya sebagai salah satu alat (analisis), maka matematika bersifat pendukung. Keberadaan ilmu matematika diharapkan dapat memudahkan seseorang memahami ilmu yang diperlajarinya. Simbol-simbol matematis digunakan untuk menyatakan permasalahan dalam dunia bisnis serta menggunakan dalil-dalil matematis untuk membantu pembahasan masalah tersebut. Matematika Bisnis adalah aplikasi konsep-konsep dasar matematika dalam dunia bisnis. Matematika Bisnis berisi metode aplikasi terhadap formulasi dan pendekatan matematika untuk pengambilan keputusan dan operasional manajerial secara terukur.

Cakupan materi yang dipelajari dalam buku Matematika Bisnis ini meliputi:

- Himpunan
- Sistem Bilangan
- Pangkat dan Akar
- Turunan dan Penerapannya dalam Ilmu Ekonomi
- Integral dan Terapannyadalam Ilmu Ekonomi
- Program Linier
- Persentase, Rasio dan Proporsi

Penerbit Poliban Press
Redaksi :
Politeknik Negeri Banjarmasin, Jl. Brigjen H. Hasan Basry, Pangeran, Komp. Kampus ULM, Banjarmasin Utara
Telp : (0511)3305052
Email : press@poliban.ac.id

ISBN 978-623-91786-0-4