PENGOLAHAN SINYAL

KHAIRUNNISA

Diterbitkan Atas Kerjasama
Deepublish dengan Politeknik Banjarmasin

PENGOLAHAN SINYAL

UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4
Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26
Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

i. penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
ii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
iii. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
iv. penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Khairunnisa

PENGOLAHAN SINYAL

PENGOLAHAN SINYAL

Penulis:
Khairunnisa

e-ISBN:
978-623-92412-3-0 (PDF)

Editor dan Penyunting:
Reza Fauzan

Desain Sampul dan Tata Letak:
Eko Sabar Prihatin; Rahma Indera

Penerbit:
POLIBAN PRESS
Cetakan Pertama, 2019

Redaksi:
Politeknik Negeri Banjarmasin, Jl. Brigjen H. Hasan Basry,
Pangeran, Komp. Kampus ULM, Banjarmasin Utara
Telp: (0511)3305052
Email: press@poliban.ac.id

Dicetak oleh:
PERCETAKAN DEEPUBLISH
Jl.Rajawali, G. Elang 6, No 3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman
Jl.Kaliurang Km.9,3 – Yogyakarta 55581
Telp/Faks: (0274) 4533427
Website: www.deepublish.co.id
www.penerbitdeepublish.com
E-mail: cs@deepublish.co.id

Katalog Dalam Terbitan (KDT)
Khairunnisa —Cet. **1**. — **Pengolahan Sinyal**: Poliban Press, 2019.

x; **153** hlm.; **15.5x23 cm**

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunianya sehingga buku Pengolahan Sinyal tahun 2019 telah dapat diselesaikan. Buku ini merupakan pengantar bagi mahasiswa yang menempuh mata kuliah Pengolahan Sinyal di Politeknik Negeri Banjarmasin.

Terimakasih disampaikan kepada Joni Riadi S.ST., M.T. selaku Direktur Politeknik Negeri Banjarmasin dan Nurmahaludin, S.T., M.T. selaku Ketua Pusat Penelitian dan Pengabdian Masyarakat beserta sekretaris dan staf. Terima kasih juga disampaikan kepada Faris Ade Irawan, Reza Fauzan, Eko Sabar Prihatin dan Rahma Indera yang telah berkontribusi dalam editing serta seluruh tim Poliban Press dan semua pihak yang telah ikut membantu dalam penyelesaian buku ini.

Kami menyadari masih terdapat kekurangan dalam buku ini untuk itu kritik dan saran terhadap penyempurnaan buku ini sangat diharapkan. Semoga buku ini dapat memberi manfaat bagi mahasiswa Politeknik khususnya dan bagi semua pihak yang membutuhkan.

Banjarmasin, Agustus 2019

Ketua Poliban Press

PRAKATA

Assalamu'alaikum Wr.Wb

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan petunjuk, bimbingan lahir dan batin sehingga buku ajar Pengolahan Sinyal ini selesai disusun. Shalawat dan salam kami haturkan pada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, para keluarga, sahabat dan semua pengikut beliau yang setia sampai akhir jaman.

Buku ini merupakan kompilasi dari beberapa materi yang pernah disampaikan oleh penulis kepada mahasiswa selama mengampu Mata Kuliah Pengolahan Sinyal di Politeknik Negeri Banjarmasin. Dalam buku ini, penulis berusaha menyusun materi secara sistematis dan berurutan. Dilihat dari sudut pemahaman penulis. Materi dibatasi hanya pada tahap yang penulis anggap bisa dipahami oleh mahasiswa tingkat diploma di Politeknik. Pada setiap bab disertai dengan contoh soal dan pembahasan sehingga diharapkan mahasiswa dapat lebih memahami materi secara keseluruhan.

Beberapa gambar simulasi dalam buku ini dilengkapi dengan contoh program matlab, ditandai dengan simbol matlab ( ). Contoh program dapat dilihat di bagian lampiran. Agar dapat memahami materi dalam buku ini, mahasiswa perlu memiliki pengetahuan fisika dasar tentang gelombang dan matematika dasar (bilangan biner, persamaan sinusoida, diferensial, dan integral).

Tidak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu hingga buku ini bisa diselesaikan. Kritik dan saran penulis terima dengan tangan terbuka demi tercapainya kesempurnaan untuk kebaikan kita bersama.

Wassalam,
Banjarmasin, Agustus 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

PEMAHAMAN DASAR TENTANG SINYAL

1.1. Tujuan Pembelajaran

Pada akhir perkuliahan ini mahasiswa akan dapat:

1. Memahami konsep dasar pengolahan sinyal.
2. Menyebutkan definisi sinyal.
3. Membedakan sinyal waktu-kontinu dan sinyal waktu-diskrit.
4. Menyebutkan keuntungan-keuntungan dari sinyal digital terhadap sinyal analog.
5. Menjelaskan konsep dasar dari pemrosesan sinyal.
6. Menyebutkan keandalan apa saja yang diberikan oleh Pengolahan Sinyal Digital.
7. Menyebutkan aplikasi-aplikasi apa saja yang memanfaatkan Pengolahan Sinyal Digital

1.2. Pendahuluan

Pengolahan sinyal adalah suatu bagian dari sains. Teknik pengolahan sinyal berkembang pesat seiring dengan perkembangan teknologi komputer dan industri rangkaian terintegrasi. Perkembangan yang pesat dalam teknologi rangkaian-terintegrasi dimulai dengan integrasi skala medium (MSI) dan kemudian integrasi skala besar (LSI) dan sekarang, integrasi skala sangat besar (VLSI). Bahkan saat ini skala integrasi mikro (10^{-6}) untuk microchip didesain ulang sebagai teknologi nano (10^{-9}).

Kemajuan teknologi rangkaian-terintegrasi memacu perkembangan industri elektronika dimana rangkaian elektronik menjadi sangat kuat, lebih kecil, lebih cepat dan lebih murah.

Rangkaian elektronik yang murah dan relatif cepat ini memungkinkan untuk mengkonstruksi sistem yang canggih yang dapat melakukan fungsi dan tugas pengolahan sinyal yang kompleks. Saat ini, hampir semua tugas pengolahan sinyal yang dilakukan secara konvensional dengan piranti analog sekarang dilakukan dengan perangkat keras digital yang tentu lebih efektif.

Sinyal memegang peranan penting dalam kehidupan modern, karena saat ini masyarakat tidak lepas dari telekomunikasi terutama handphone, yang mana piranti ini sarat dengan pengolahan sinyal. Tanpa disadari di alam, sinyal juga dapat ditemukan di sekitar manusia dalam bentuk sinyal elektromagnetik tubuh makhluk hidup.

Agar sinyal dapat bermanfaat sesuai kebutuhan manusia dengan efisien dan optimal, maka diperlukan pengolahan sinyal dengan menggunakan suatu sistem elektronika analog maupun yang digital.

Buku ajar ini menyajikan pengantar tentang analisis dasar dan teknik-teknik untuk pengolahan sinyal yang pada akhirnya nanti diarahkan untuk pengolahan sinyal secara digital. Beberapa terminologi dasar dideskripsikan untuk menjelaskan operasi-operasi penting yang berhubungan dengan proses pengubahan suatu sinyal analog menjadi bentuk digital yang sesuai untuk pemrosesan digital. Setiap analisis sinyal disertakan dengan simulasi menggunakan MATLAB.

1.3. Definisi Sinyal

Diambil dari berbagai sumber, pengertian sinyal sangat bermacam, antara lain:

- Fungsi satu variabel atau lebih yang menunjukkan informasi dalam fisik fenomena alam.
- Sistem berupa arus data yang mengalir melalui jalur transmisi.
- Suatu indikator yang digunakan sebagai alat komunikasi.
- Suatu impuls atau fluktuasi besaran listrik seperti tegangan, arus, kuat medan listrik, yang mengkodekan informasi.

- Suatu impuls elektronik atau gelombang radio yang dikirim atau diterima.
- Suatu kuantitas/besaran yang berubah-ubah.

Secara umum sinyal didefinisikan sebagai besaran fisik yang berubah-ubah menurut waktu, ruang atau variabel-variabel lainnya. Secara matematis, kita mendeskripsikan sinyal sebagai fungsi dari satu atau lebih variabel bebas. Sebagai contoh:

$$s_1(t)=5t \tag{1.1}$$

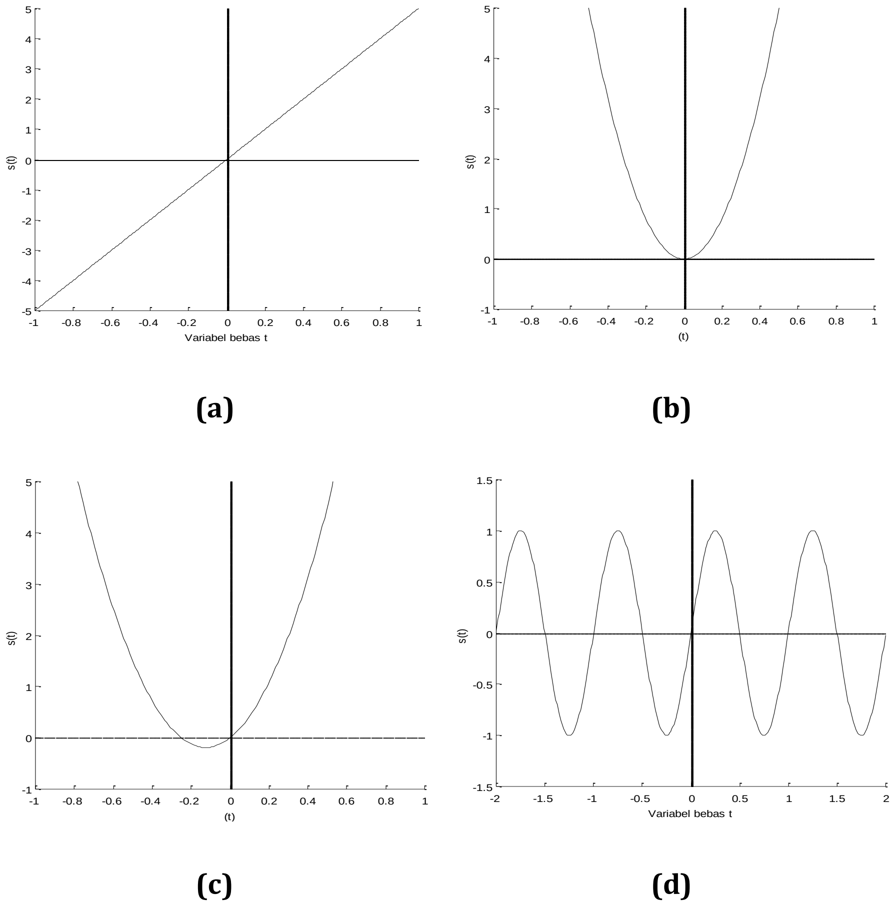
$$s_2(t)=20t^2 \tag{1.2}$$

$$s_3(x,y)=3x+2xy+10y^2 \tag{1.3}$$

$$s_4(t)=5\sin\omega t \tag{1.4}$$

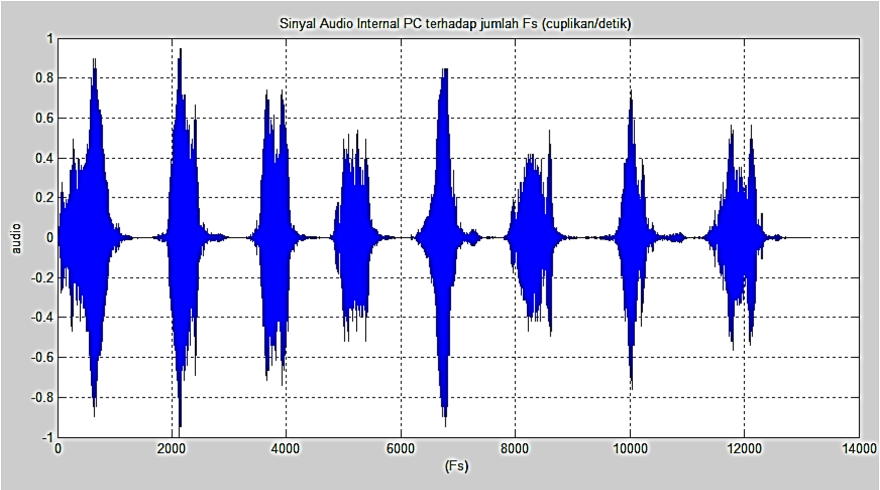
Persamaan yang pertama berubah-ubah menurut variabel bebas waktu (t) secara linear, persamaan kedua berubah-ubah menurut variabel bebas waktu (t) secara kuadratik, persamaan yang ketiga berubah-ubah menurut dua variabel bebas x dan y yang mewakili dua koordinat yang berhubungan dalam suatu bidang, dan persamaan yang keempat disebut sebagai persamaan sinusoida. Sinusoida ini lah yang kelak akan sering kita gunakan dalam menganalisa sinyal. Keempat persamaan diilustrasikan pada gambar 1.1.

Sinyal-sinyal yang dideskripsikan pada keempat persamaan di atas termasuk kelas sinyal yang dapat didefinisikan secara presisi (linear, kuadratik, eksponensial, dll), tergantung pada bentuk fungsi variabel bebas yang menyusun persamaannya. Namun, bagaimana dengan sinyal suara? Sinyal suara tidak dapat dideskripsikan secara fungsional seperti di atas. Sinyal semacam ini biasa disebut sebagai sinyal natural. Seperti contoh pada gambar 1.2 yang menggambarkan tegangan sinyal suara sebagai fungsi waktu. Tegangan tersebut bersesuaian dengan tekanan akustik pada telinga, yang merupakan reaksi terhadap perubahan tekanan. Contoh sinyal natural lainnya adalah Elektrokardiogram (ECG), merupakan sinyal denyut jantung yang memberikan informasi tentang kondisi jantung pasien (gambar 1.3).

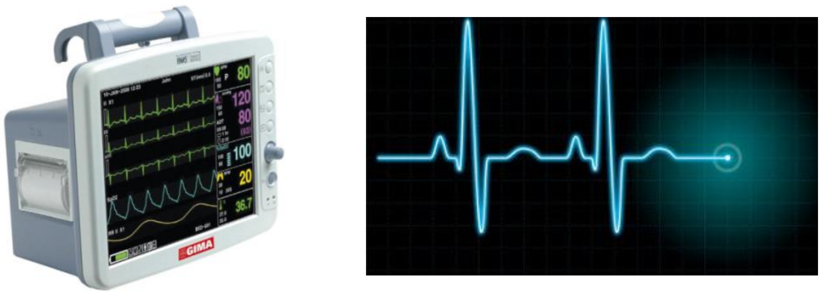


Gambar 1.1 Grafik Sinyal

(a) $s = 5t$ (b) $s = 20t^2$ (c) $s = 3x+2xy+10y^2$ (d) $s(t) = \sin\omega t$

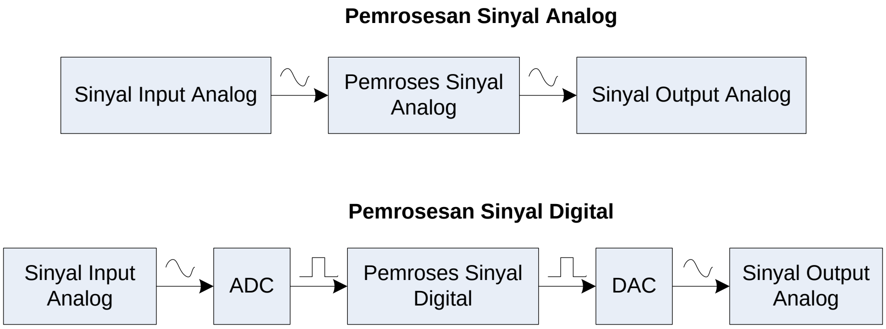


Gambar 1.2 Sinyal Audio Internal PC dengan Frekuensi Sampling 8000 cuplikan/detik



Gambar 1.3 Sinyal Denyut Jantung Pada Layar Elektrokardiograf
Sumber: alkeslabindo.com

Dalam proses pengolahan sinyal analog, sinyal input masuk ke *Analog Signal Processing*, diberi berbagai perlakukan (misalnya pemfilteran, penguatan, dsb.) dan outputnya berupa sinyal analog. Proses pengolahan sinyal secara digital memiliki bentuk sedikit berbeda. Komponen utama sistem ini berupa sebuah processor digital yang mampu bekerja apabila inputnya berupa sinyal digital. Untuk sebuah input berupa sinyal analog perlu proses awal yang bernama digitalisasi melalui perangkat yang bernama *analog-to-digital conversion* (ADC), dimana sinyal analog harus melalui proses sampling, quantizing dan coding. Demikian juga output dari processor digital harus melalui perangkat *digital-to-analog conversion* (DAC) agar outputnya kembali menjadi bentuk analog. Ini bisa kita amati pada perangkat seperti PC, *digital sound system*, dsb.



Gambar 1.4 Elemen Dasar Sistem Pengolahan Sinyal

1.4. Klasifikasi Sinyal

Ada beberapa teknik pengolahan sinyal yang hanya bisa diterapkan pada jenis sinyal tertentu. Sebelum membahas analisis pengolahan sinyal lebih jauh, perlu diketahui beberapa klasifikasi sinyal yang penting.

1.4.1. Sinyal Waktu-Kontinu dan Sinyal Waktu-Diskrit

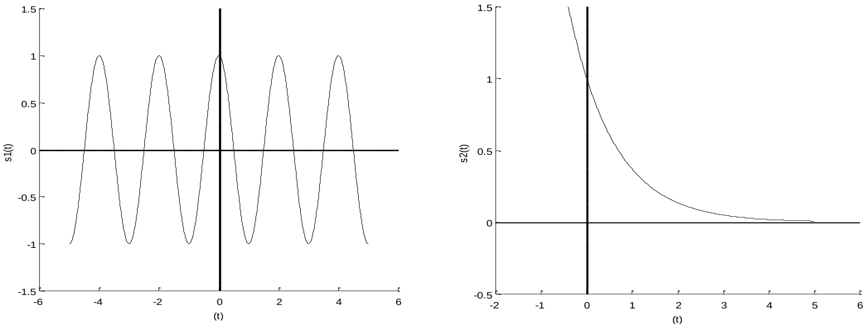
1. Sinyal Waktu-Kontinu

Sinyal waktu-kontinu atau sinyal analog adalah sinyal yang diinterpretasikan pada setiap nilai waktu dan diambil untuk nilai-nilai dalam selang waktu kontinu dari a hingga b. Selang waktu demikian dapat ditulis sebagai (a, b), dengan a dapat menjadi $-\infty$ dan b dapat menjadi ∞, atau ditulis $(-\infty,\infty)$ atau $-\infty \le t \le \infty$ [John:8].

Secara matematis sinyal analog dapat digambarkan sebagai fungsi dari suatu variabel kontinu. Contoh:

$$\left.\begin{aligned} s_1(t) &= \cos \pi . t \\ s_2(t) &= \mathrm{e}^{-t} \end{aligned}\right\} \quad -\infty < t < \infty \tag{1.5}$$

Diilustrasikan pada gambar 1.5.



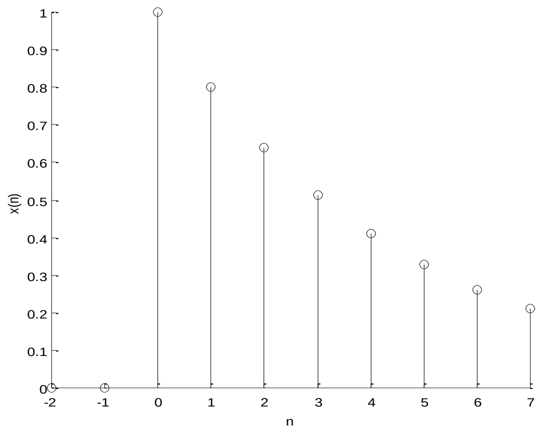
Gambar 1.5 Grafik Sinyal, $s_1 = \cos\pi.t$ (kiri) $s_2 = e^{-t}$ (kanan)

2. Sinyal Waktu-Diskrit

Sinyal waktu-diskrit, umumnya disebut sebagai sinyal digital, adalah sinyal yang diinterpretasikan hanya pada nilai-nilai waktu khusus tertentu. Biasanya diambil pada selang-selang waktu yang sama.

Contoh,

$$x(n) = \begin{cases} 0{,}8^n & \text{jika} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{yang lainnya} \end{cases} \tag{1.6}$$



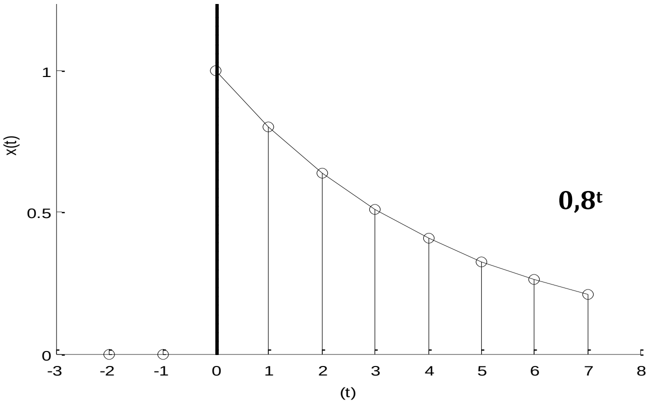
Gambar 1.6 Tampilan Grafis Sinyal Waktu-Diskrit
$x(n) = 0,8^n; n \geq 0$ dan $x(n) = 0$; $n \leq 0$

Variabel $x(n)$ merupakan suatu sinyal waktu diskrit, yang digambarkan secara grafik seperti pada gambar 1.6. Jika kita menggunakan indeks n pada waktu-diskrit sesaat sebagai variable bebas, nilai sinyal menjadi suatu fungsi variabel integer (yaitu, suatu barisan angka).

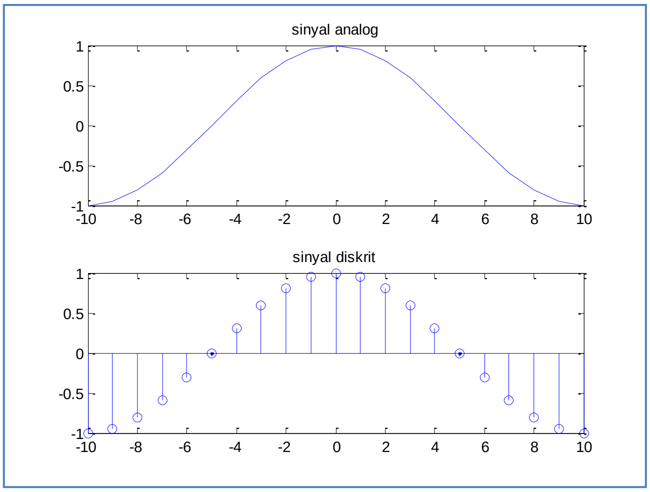
Sinyal waktu-diskrit dapat muncul dengan dua cara [John:9]:

a. Dengan memilih nilai-nilai suatu sinyal analog pada waktu diskrit sesaat. Proses ini dinamakan **pencuplikan** dan akan dibahas pada bab selanjutnya. Sebagai contoh, sinyal $x(n)$ pada gambar 1.5 dapat diperoleh dengan pencuplikan sinyal analog $x(t) = 0{,}8^t$; $t \geq 0$ dan $x(t) = 0$; $t < 0$ sekali setiap detik. Pencuplikan diilustrasikan pada gambar 1.7.
b. Dengan mengumpulkan sebuah variabel melalui periode waktu tertentu. Sebagai contoh, penghitungan jumlah kendaraan yang melalui jalan tertentu setiap jam, atau mengamati kurs dolar di bursa saham setiap jam.

Dalam pengolahan sinyal, sinyal digital berasal dari sinyal analog yang disampling, yang artinya mengambil nilai amplitudo suatu sinyal analog dalam interval waktu tertentu.



Gambar 1.7 Pencuplikan Sinyal Analog Sekali Setiap Detik
$x(t) = 0,8^t; t \geq 0$ dan $x(t) = 0; t < 0$



Gambar 1.8 Sinyal Analog dan Sinyal Diskrit yang Berasal dari Pencuplikan Sinyal Analog

1.4.2. Sinyal Ganjil dan Sinyal Genap

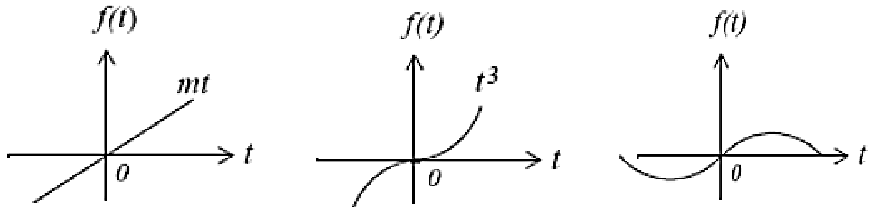
1. Sinyal Ganjil

Sinyal ganjil mempunyai sifat:

- f(-t) = -f(t)
- Polinomial dengan pangkat yang ganjil

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots$$

Contoh sinyal ganjil ditunjukkan dalam gambar 1.9:



Gambar 1.9 Sinyal Ganjil
Sumber: https://www.slideshare.net/nugrahabeny

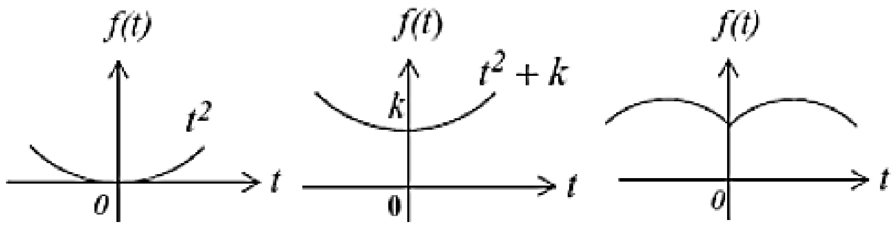
2. Sinyal Genap

Sinyal genap mempunyai sifat:

- f(-t) = f(t)
- Polinomial dengan pangkat yang genap

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots$$

Contoh:

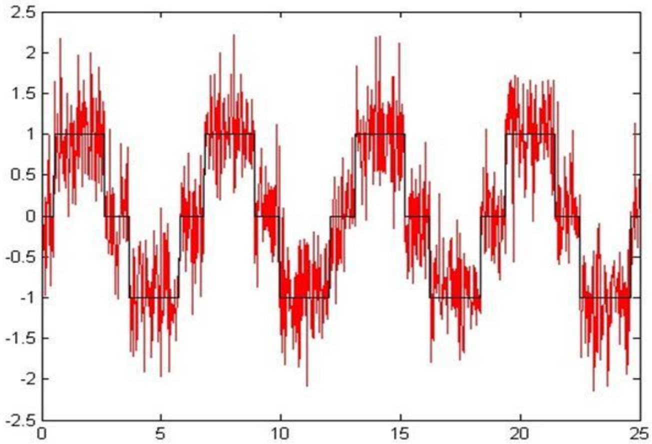


Gambar 1.10 Sinyal Genap
Sumber: https://www.slideshare.net/nugrahabeny

1.4.3. Sinyal Deterministik dan Sinyal Acak (*Random*)

1. Sinyal Deterministik

Sinyal deterministik merupakan sinyal yang nilainya secara lengkap untuk semua titik waktu sudah dikenal dan dapat diprediksi nilai selanjutnya.

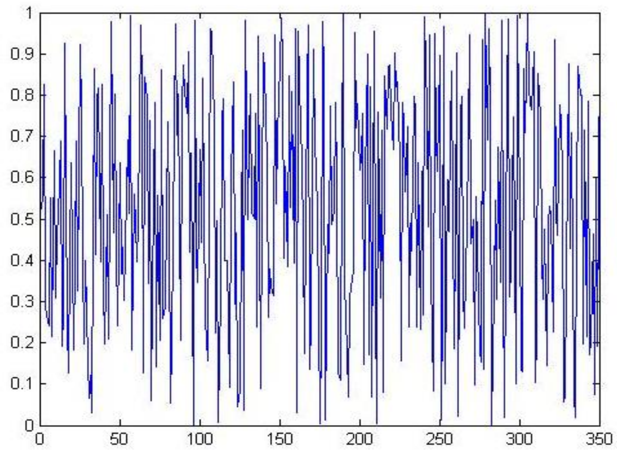


Gambar 1.11 Sinyal Deterministik

Sumber: https://nugan88.wordpress.com

2. Sinyal Acak (Random)

Sinyal random mempunyai nilai random untuk waktu yang diberikan. Nilai-nilai sinyal random untuk setiap titiknya tidak diketahui dengan pasti, sehingga sinyal random hanya dibahas berdasarkan karakter statistik, misalnya nilai rata-rata dan nilai tengah.

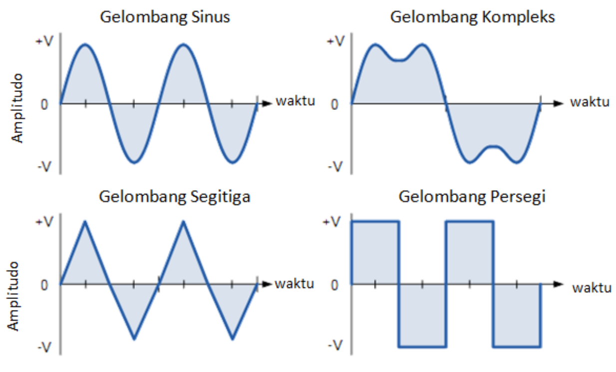


Gambar 1.12 Sinyal Random

1.4.4. Sinyal Periodik dan Non-Periodik

1. Sinyal Periodik

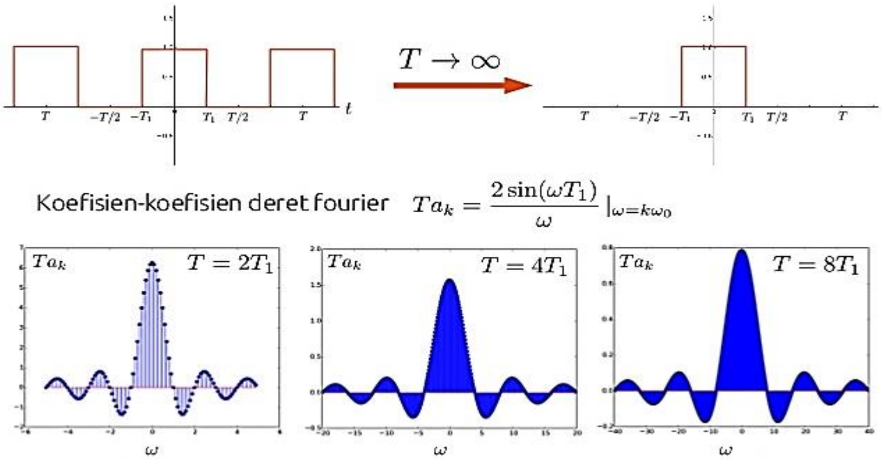
Sinyal periodik adalah sinyal yang berulang dalam setiap interval waktu tertentu. Setiap perulangan menunjukkan pola yang sama.



Gambar 1.13 Sinyal Periodik
Sumber: https://dewinofigr.wordpress.com

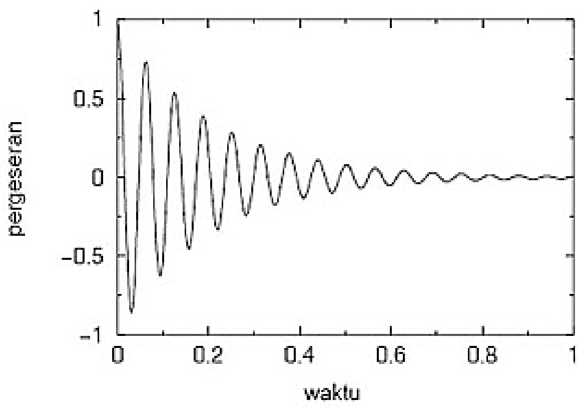
2. Sinyal Non-Periodik

Sinyal non-periodik adalah sinyal yang tidak menunjukkan pola perulangan. Sinyal non-periodik dikatakan juga sebagai sinyal periodik dengan perioda T tak hingga (T → ∞)



Gambar 1.14 Sinyal Aperiodik

Sumber: https://www.slideshare.net/dwiprananto



Gambar 1.15 Sinyal Aperiodik

Sumber: https://rizal.blog.undip.ac.id

1.5. Keunggulan Sinyal Digital terhadap Sinyal Analog

Ada beberapa alasan mengapa sinyal digital lebih disukai daripada sinyal analog, antara lain:

1. Sinyal analog murah dan praktis, misal: attenuator/amplifier dan filter sederhana. Tetapi, dalam beberapa aplikasi, sinyal digital dapat menawarkan *performance* yang tinggi dengan harga yang murah.
2. Dapat diulang-ulang pemakaiannya (*repeatability*), karena sinyal digital memiliki tingkat kesensitifan yang rendah terhadap daya tahan komponen, perubahan suhu, dan usia. Komponen-komponen analog seperti resistor, kapasitor, dioda dan op-amp banyak dipengaruhi oleh suhu, kelembaban dan usia. Rangkaian analog yang sensitif terhadap suhu dapat menghasilkan unjuk kerja yang berbeda jika dioperasikan, misalnya, di Inggris dan Mesir yang memiliki suhu udara yang berbeda. Efek dari usia komponen yang sudah terlampau lama juga dapat mengganggu karakteristik dan unjuk kerja rangkaian analog. Rangkaian digital tidak begitu saja berangsur-angsur mengubah karakteristiknya untuk menyesuaikan dengan suhu dan kelembaban setempat. Dengan kata lain, rangkaian digital dapat terus dipakai berulang-ulang selama mereka didesain dengan toleransi yang cukup agar dapat beroperasi sebagaimana mestinya walaupun di luar dari kondisi yang diharapkan.
3. Memiliki perlindungan yang tinggi terhadap *noise*.
4. *Programmability* (dapat diprogram). Sebuah *chip processor*, dapat memiliki beberapa fungsi. Misal, sebuah PC (*Personal Computer*) bisa berfungsi sebagai *music player* jika software winamp dipasang juga bisa berfungsi sebagai pengolah data jika software MS Office diinstal. Software berfungsi sebagai program.
5. *Upgradability* (dapat di up-grade). Suatu saat mungkin saja kita ingin meng up-grade, menambahkan beberapa fungsi, atau merubah fungsi pada perangkat atau sistem yang kita buat PC.

Dengan sistem digital, kita bisa memodifikasi kode/program yang kita buat. Tapi pada sistem analog, mungkin saja kita harus memasang komponen baru atau bahkan mendesain ulang sistem yang kita buat.

6. *Flexibility* (fleksibel). Sebuah papan *processor* dibuat untuk memberikan beberapa fungsi dengan mengisikan program-program baru ke dalamnya tanpa harus membuat papan rangkaian baru untuk setiap fungsi baru yang kita inginkan seperti halnya pada rangkaian analog.
7. *Special Applications* (memiliki aplikasi khusus yang tidak dimiliki oleh sistem lain)

1.6. Aplikasi Pengolahan Sinyal

Pengolahan sinyal telah banyak digunakan dalam berbagai aplikasi meliputi berbagai disiplin ilmu.

1. Bidang telekomunikasi
   - Transmisi sinyal handphone/smartphone dengan BTS
   - *Echo Cancellation*
   - *Video Teleconference*
   - Komunikasi Data
   - Komunikasi Satelit
2. Bidang kedokteran
   - ECG (*Electrocardiograph*), yaitu alat pengukur detak jantung
   - EEG *Brain Mappers*
   - USG (*Ultra Sono Graph*)
3. Pengolahan Citra Digital
   - Pengenalan pola sidik jari (*pattern recognition*)
   - Faksimile
   - *Satellite Weather Map*
   - Sensor kamera
4. Sistem Kontrol
   - Pendingin Udara (*Air Conditioner* – AC)
   - Sistem auto pilot pesawat udara

Contoh-contoh aplikasi yang disebutkan di atas hanya merupakan garis besarnya saja. Kalau dikembangkan, akan lebih banyak aplikasi ditemukan dimana setiap aplikasi memiliki mekanisme pengolahan sinyal yang berbeda. Misal, kolaborasi teknologi komunikasi satelit dan sistem auto pilot pesawat jika diterapkan pada radar akan menghasilkan teknologi yang lebih andal jika dikembangkan untuk bidang keamanan transportasi udara.

1.7. Soal-Soal Latihan Bab I

1. Dengan kalimatmu sendiri, cobalah untuk mendefinisikan apa yang dimaksud dengan:
   a. Sinyal analog
   b. Sinyal digital
2. Apa saja keuntungan dari pemakaian sinyal analog?
3. Apa saja keuntungan dari pemakaian sinyal digital?
4. Berikan beberapa alasan mengapa sinyal digital saat ini lebih dipilih dalam sistem yang melibatkan pemrosesan sinyal.
5. Apakah yang menjadi perbedaan mendasar yang terdapat dalam sistem rangkaian digital dan rangkaian analog? Sebutkan masing-masing satu contoh dalam kehidupan sehari-hari
6. Klasifikasikan perangkat sistem berikut apakah termasuk dalam mekanisme sinyal analog atau sinyal digital atau keduanya. Jelaskan secara singkat dengan kalimatmu sendiri.
   a. Pendingin ruangan
   b. Kipas angin
   c. LCD proyektor
   d. Kulkas
   e. TV Berwarna
   f. Telepon
   g. Printer
   h. Mikrophone
   i. Speaker
   j. Alarm

7. Sebutkan satu contoh aplikasi pengolahan sinyal analog dan satu contoh aplikasi pengolahan sinyal digital. Jelaskan mekanisme kerja nya, lengkapi penjelasan dengan blok diagram.

BAB II

KONSEP FREKUENSI DALAM SINYAL

2.1. Tujuan Pembelajaran

Pada akhir perkuliahan ini mahasiswa akan dapat:

1. Memahami konsep dasar frekuensi dalam sinyal, baik sinyal waktu-kontinu maupun sinyal waktu-diskrit.
2. Menjelaskan definisi frekuensi, perioda, frekuensi sudut, amplitudo dan fase dalam sinyal, baik sinyal waktu-kontinu maupun sinyal waktu-diskrit.
3. Menyebutkan sifat-sifat sinyal, baik sinyal waktu-kontinu maupun sinyal waktu-diskrit.
4. Memahami gambar/grafik/ilustrasi sinyal yang disajikan.
5. Menjelaskan gambar/grafik/ilustrasi sinyal yang disajikan
6. Membuat/menggambar grafik/ilustrasi sinyal sesuai dengan materi yang diberikan
7. Memahami dan menjelaskan efek besarnya frekuensi terhadap sinyal, baik sinyal waktu-kontinu maupun sinyal waktu-diskrit.

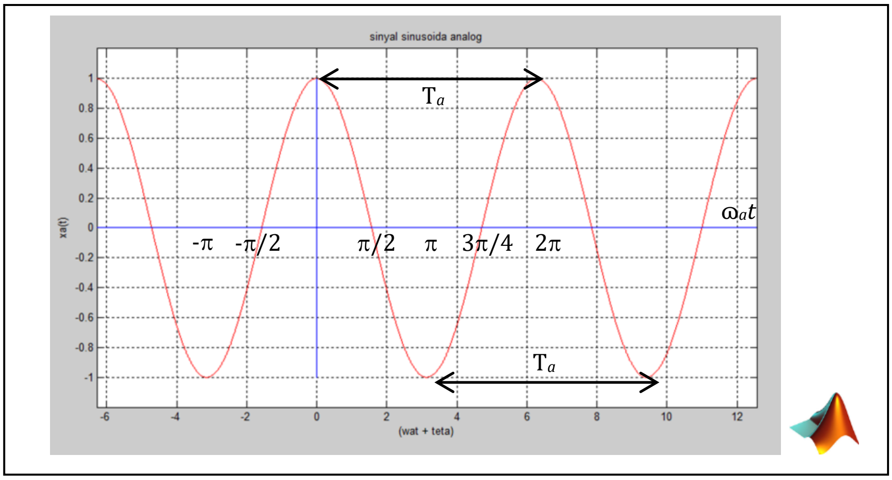
2.2. Konsep Frekuensi dalam Sinyal Sinusoida Waktu-Kontinu

Dalam pelajaran fisika, kita mengetahui bahwa frekuensi berhubungan erat dengan gerak periodik, yang dideskripsikan oleh fungsi-fungsi sinusoida. Konsep frekuensi berbanding langsung dengan konsep waktu.

Sinyal sinusoida waktu-kontinu dideskripsikan secara matematis sebagai:

$$x_a(t) = A\cos(\omega_a t + \theta), \qquad -\infty < t < \infty \tag{2.1}$$

$x_a(t)$ = sinyal analog (subskrip a menunjukkan analog)
A = amplitudo atau $x_a(t)$ maksimum
ω_a = $2\pi f_a$ rad/sekon (frekuensi sudut sinyal analog)
θ = fase



Gambar 2.1 Fungsi Sinusoida $x_a(t) = A\cos\omega_a t$, Digambarkan Terhadap $\omega_a t$, (A = 1)

Gambar 2.1 mengilustrasikan fungsi $x_a = A\cos\omega_a t$. Dari gambar dapat dilihat fungsi berulang setiap 2π radian, sehingga dikatakan perioda $T_a = 2\pi$. Dalam gambar 2.2, fungsi $x_a(t)$ digambar terhadap t, sehingga periodanya adalah $T_a = t$.

T adalah perioda dalam satuan detik, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh sinyal analog untuk bergetar/merambat sebanyak satu kali atau sebanyak satu putaran

f_a adalah dalam satuan hertz (Hz), yaitu jumlah getaran atau putaran yang dihasilkan gelombang analog dalam waktu 1 detik

2π rad = $360°$

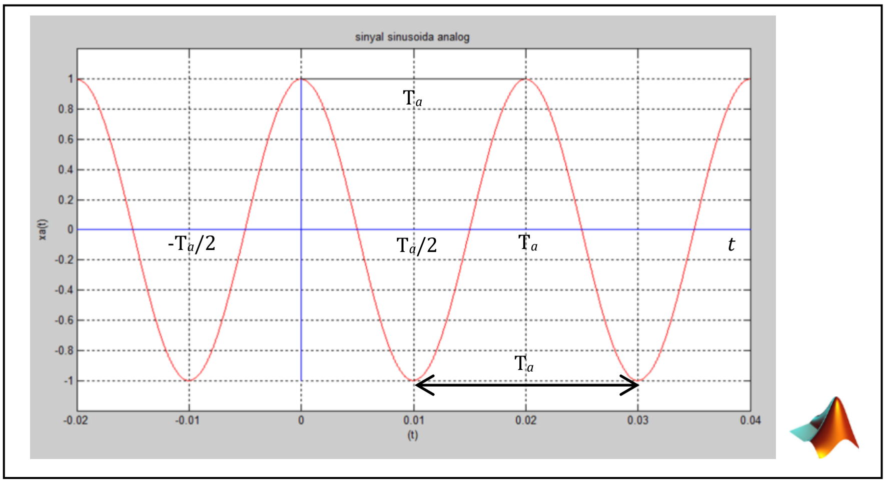
Dari definisi di atas, maka:

$$\boxed{f_a = \frac{1}{T_a}} \qquad (2.2)$$

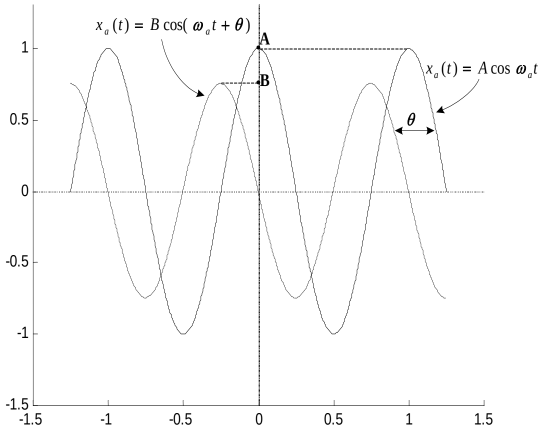
Lihat kembali gambar 2.1 dan 2.2. Untuk $\omega_a t = 2\pi$, dimana $t = T_a$, maka:

$$\omega_a T_a = 2\pi \quad \rightarrow \quad \omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 2\pi f_a \qquad (2.3)$$

Persamaan (2.1) adalah bentuk yang lebih umum dimana θ disebut sebagai beda fase atau sudut fase dalam satuan radian. Ilustrasi gelombangnya ditunjukkan pada gambar 2.3.

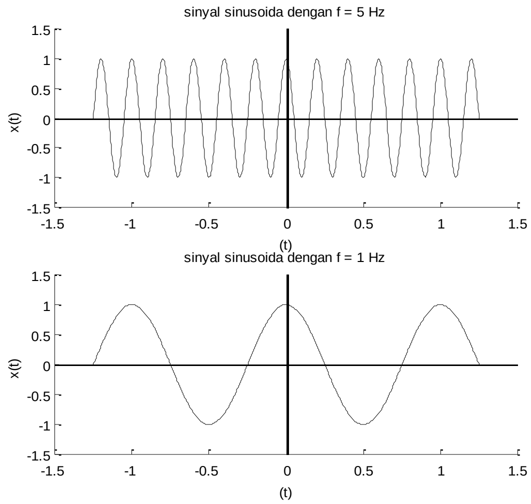


Gambar 2.2 Fungsi Sinusoida $x_a(t) = A\cos\omega_a t$ Digambarkan Terhadap t, A =1; f = 50Hz



Gambar 2.3 Sinyal $x_a(t) = B\cos(\omega_a t + \theta)$ Mendahului $x_a(t) = A\cos\omega_a t$ Sejauh θ

Bagaimana jika frekuensi sinyal dinaikkan?? Lihat gambar 2.4!



Gambar 2.4 (atas) Sinyal $x_a(t) = A\cos\omega_a t$ dengan f = 5 Hz (bawah) $x_a(t) = A\cos\omega_a t$ dengan f = 1 Hz

Sementara sinyal bawah (gambar 2.4) masih berjalan 1 periode, tetapi sinyal atas sudah menempuh sebanyak 5 periode. Dengan kata lain frekuensi sinyal atas 5x lebih besar dari frekuensi sinyal bawah.

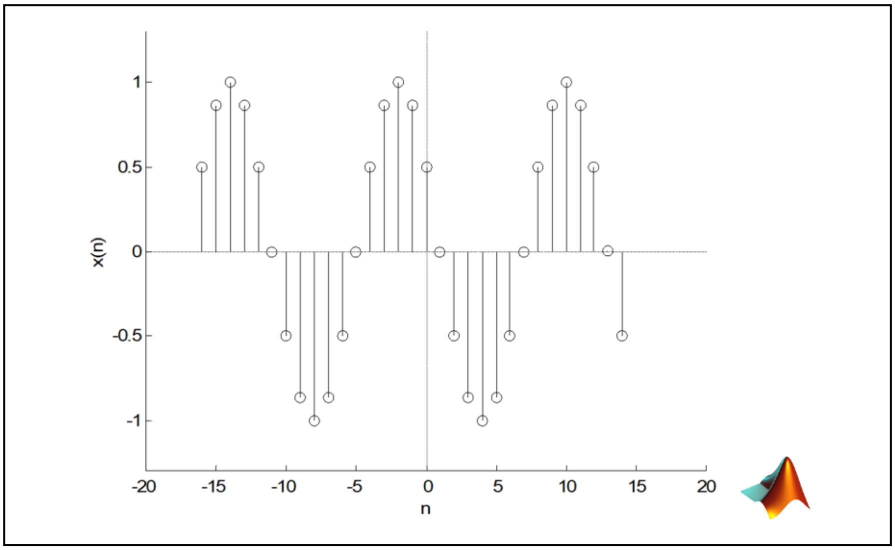
2.3. Konsep Frekuensi dalam Sinyal Sinusoida Waktu-Diskrit

Suatu sinyal sinusoida waktu-diskrit dapat dinyatakan sebagai:

$$x(n) = A\cos(\omega_d n + \theta), \qquad -\infty < n < \infty \qquad (2.4)$$

n = suatu variabel integer, yang dinamakan jumlah cuplikan
A = amplitudo
ω_d = frekuensi sudut (radian per cuplikan) sinyal dikrit
= $2\pi f_d$
θ = fase dalam radian

Gambar 2.5 memperlihatkan suatu sinusoida x(n) = $\cos(\omega_d t + \theta)$, $\omega_d = {}^{\pi}/_{6}$ rad/cuplikan $\theta = {}^{\pi}/_{3}$ rad dengan kata lain frekuensinya adalah $f_d = {}^{\omega_d}/_{2\pi} = {}^{1}/_{12}$ putaran setiap cuplikan atau dalam satu perioda sinyal analog menghasilkan 12 cuplikan. (Coba hitung jumlah cuplikan yang dihasilkan).



Gambar 2.5 Contoh Sinyal Sinusoida Waktu Diskrit x(n) = $\cos(\omega_d n + \theta)$, $\omega_d = {}^{\pi}/_{6}$, rad/cuplikan dan $\theta = {}^{\pi}/_{3}\, rad$

> *N* adalah perioda dalam satuan detik, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh sinyal diskrit untuk bergetar/merambat sebanyak satu cuplikan
>
> f_d adalah Frekuensi dalam satuan hertz (Hz), yaitu jumlah cuplikan yang dihasilkan sinyal diskrit dalam waktu 1 detik

2.4. Sifat-Sifat Sinyal

2.4.1. Sifat Sinyal Sinusoida Waktu-Kontinu (Analog)

Jika sinyal analog dinyatakan sebagai:

$$x_a(t) = A\cos(\omega_a t + \theta) \tag{2.5}$$

ω_a = frekuensi sudut sinyal analog (rad/sekon)
ω_a = $2\pi f_a$
f_a = frekuensi sinyal analog (Hz)

1. Untuk setiap nilai f_a yang tetap, $x_a(t)$ adalah periodik.

$$x_a(t + T_a) = x_a(t + 2\pi) \tag{2.6}$$

$T_a = 1/f_a$ = periode fundamental sinyal analog

Mudah dibuktikan dengan meninjau kembali gambar 2.1 dan 2.2.

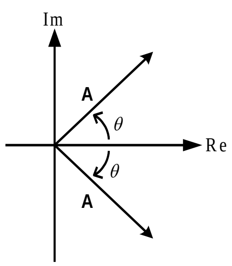
2. Interval frekuensi sinyal sinusoida waktu-kontinu adalah $-\infty < f_a < \infty$

Perlu diingat bentuk kompleks dan bentuk fasor:

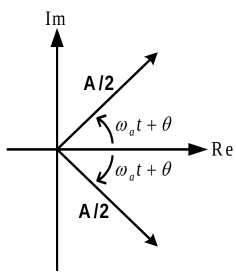
$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \tag{2.7}$$

$$Ae^{\pm j\theta} = A\underline{/\pm\theta} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.7) dan (2.8) diilustrasikan pada gambar 2.6, dimana **fasor positif bergerak berlawanan arah jarum jam** dan **fasor negatif bergerak searah jarum jam**.



Gambar 2.6 Diagram Fasor



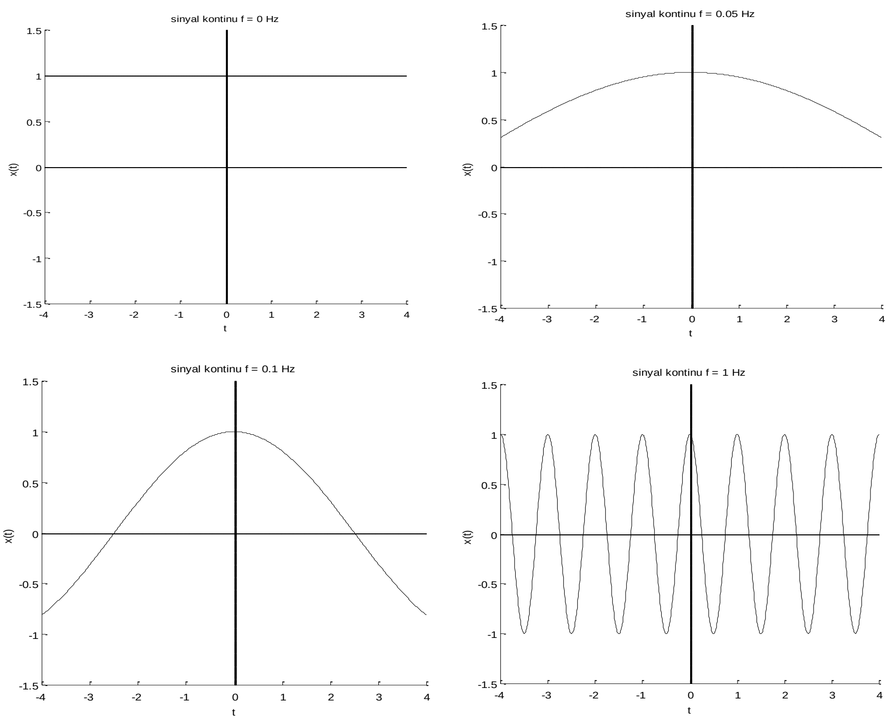
Gambar 2.7 Diagram fasor persamaan (2.9)

Maka, persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai:

$$x_a(t) = A\cos(\omega_a t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_a t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_a t+\theta)} \tag{2.9}$$

Untuk kepentingan matematis, kedua frekuensi positif dan negatif digunakan. Karena itu interval frekuensi sinyal analog adalah $-\infty < f_a < \infty$.

3. **Penambahan frekuensi f_a menghasilkan pertambahan laju osilasi sinyal.**



Gambar 2.8 Respon Sinyal Analog untuk Setiap Penambahan Frekuensi.

Kita mengamati bahwa untuk f_a = 0, maka T = ∞. Karena itu, sinyal tampak sebagai garis lurus.

2.4.2. Sifat Sinyal Sinusoida Waktu-Diskrit

Jika sinyal diskrit dinyatakan sebagai:

$$x(n) = A\cos(\omega_d n + \theta) \tag{2.10}$$

ω_d = $2\pi f_d$ = frekuensi sudut sinyal diskrit (rad/sekon)
f_d = frekuensi sinyal diskrit (putaran/cuplikan)

1. **Sinyal sinusoida waktu-diskrit periodik hanya jika frekuensi f_d memiliki angka rasional**

Sinyal waktu-diskrit $x(n)$ adalah periodik dengan periode N dan N >0, jika dan hanya jika:

$$x(n+N) = x(n) \tag{2.11}$$

Tinjau sinusoida:

$$\begin{aligned} &\cos 0^\circ = \cos 360^\circ = \cos 720^\circ = \ldots \\ &\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta + 4\pi) = \ldots \\ &\cos\theta = \cos(\theta + 2k\pi) \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sehingga, untuk persamaan (2.10):

$$x(n) = A\cos(2\pi f_d n + \theta) \tag{2.13}$$

$$x(n+N) = A\cos(2\pi f_d (n+N) + \theta)$$

$$x(n+N) = A\cos(2\pi f_d n + 2\pi f_d N + \theta) \tag{2.14}$$

Bandingkan persamaan (2.12) dan (2.14). Keduanya bersesuaian, jika:

$$2\pi f_d N = 2k\pi \quad \text{atau} \quad f_d = \frac{k}{N} \tag{2.15}$$

N = periode fundamental sinusoida diskrit

k dan N adalah integer, dengan kata lain f_d adalah rasional. Perhatikan bahwa perubahan frekuensi yang sangat kecil dapat menghasilkan perubahan periode diskrit yang besar.

Misal:

$f_d = \frac{31}{60}$, dengan mudah dapat kita sebutkan k = 31 dan N = 60.

$f_d = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, maka dengan mengubah k menjadi 30, didapat N = 2

2. **Sinusoida waktu-diskrit yang frekuensinya dipisahkan oleh kelipatan integer 2π adalah identik.**

Bersesuaian dengan persamaan (2.12) untuk persamaan (2.10):

$$x(n) = A\cos(\omega_d n + \theta)$$
$$x(n) = A\cos(\omega_d n + \theta + 2k\pi) = A\cos(\omega_d n + \theta + 4k\pi)$$
$$x(n) = A\cos(\omega_d n + \theta + 6k\pi)$$
$$x(n) = A\cos(\omega_d n + \theta + 2k\pi n) \qquad n = 0, 1, 2, 3,...$$
$$x(n) = A\cos((\omega_d + 2k\pi)n + \theta) \qquad k = 0, 1, 2, 3,...$$

Dan hasilnya, seluruh barisan sinusoida:

$$x_k(n) = A\cos(\omega_k n + \theta) \tag{2.16}$$

Dimana:

$$\omega_k = \omega_d + 2k\pi \qquad -\pi \le \omega_d \le \pi \quad \text{dan} \quad k = 0, 1, 2, 3,... \tag{2.17}$$

Persamaan (2.10) dan (2.16) adalah identik.

3. Interval frekuensi sinyal sinusoida waktu-diskrit adalah $-\frac{1}{2} \le f_d \le \frac{1}{2}$

Karena $f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}$, dengan batas $-\pi \le \omega_d \le \pi$, maka $-\frac{1}{2} \le f_d \le \frac{1}{2}$, disebut sebagai **interval fundamental**

4. Laju osilasi tertinggi dicapai pada ω = π atau ω = -π

Bila frekuensi sudut ω berubah dari −π hingga π, apa yang terjadi dengan sinyal diskrit? Berikut kita ambil nilai-nilai dari ω = -π, -π/2, -π/4, -π/8, 0, π/8, π/4, π/2, π (yang sesuai dengan nilai $f = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$).

Secara berurutan, gambar 2.9 menghasilkan barisan periodik yang mempunyai periode ∞, 16, 8, 4, dan 2. Periode sinusoida semakin berkurang dengan semakin bertambahnya frekuensi.

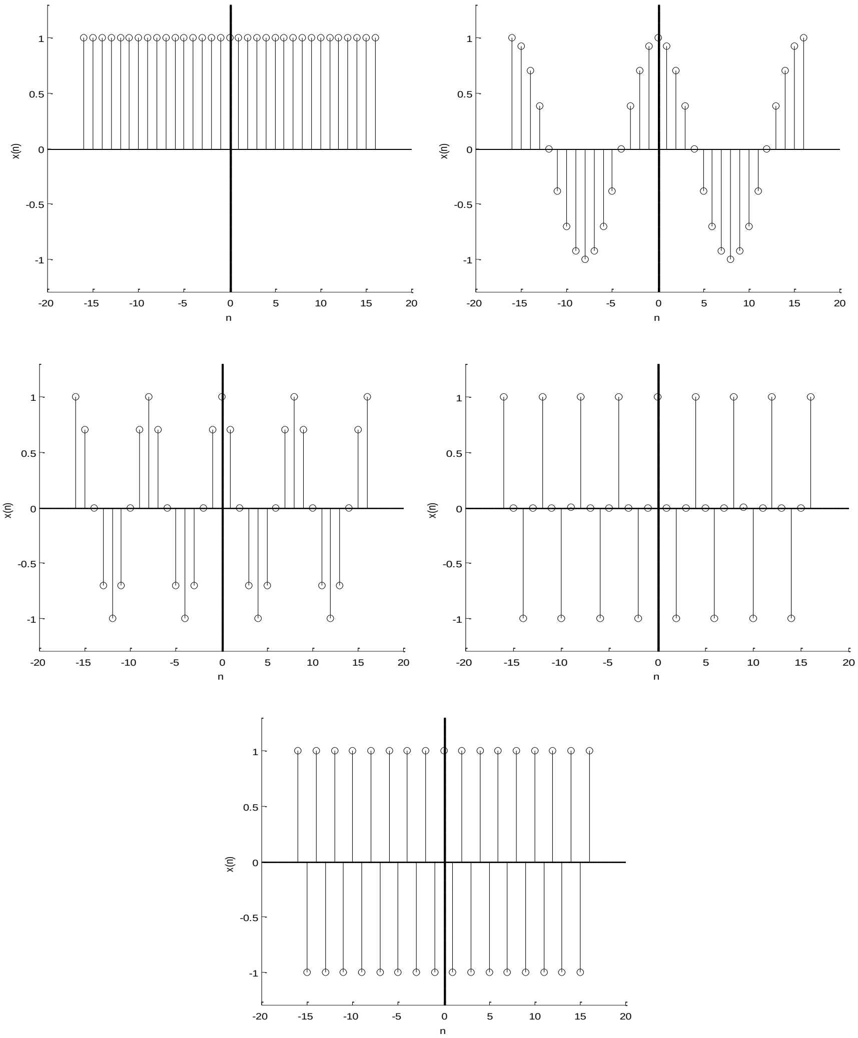
Apa yang terjadi jika perubahan ω terjadi pada π ≤ ω ≤ 2π? Kita meninjau sinusoida $x(n)$ dengan frekuensi ω dan sinusoida $x_0(n)$ dengan $\omega_0 = 2\pi - \omega$. Jika π ≤ ω ≤ 2π, berubah dari π hingga 2π, otomatis ω_0 berubah dari π hingga 0 atau $0 \le \omega_0 \le \pi$. Secara matematis dapat kita analisa:

$$
\begin{aligned}
x(n) &= A\cos\omega n \\
x_0(n) &= A\cos\omega_0 n = A\cos(2\pi - \omega)n \\
x_0(n) &= A\cos(-\omega n) = A\cos(\omega n) \\
x_0(n) &= x(n)
\end{aligned}
$$

Nilai sinusoida diskrit x(n) = A$\cos\omega$n, π ≤ ω ≤ 2π adalah sama dengan:

$$\mathrm{x_0(n) = A\cos\omega_0 n}, 0 \le \omega_0 \le \pi$$

Karena cos θ = cos (-θ), maka jika osilasi tertinggi adalah pada ω = π, ini berlaku juga untuk ω = -π.



Gambar 2.9 Sinyal $x(n) = \cos(\omega_d n)$ dengan $\omega = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/2, \pi$

2.5. Soal-Soal Latihan Bab II

1. Tentukan nilai frekuensi f_a dan perioda T_a pada setiap persamaan sinusoida analog berikut, hitunglah nilai $x_a(t)$ pada saat t sama dengan 0, $T_a/4$, $T_a/2$, $3T_a/4$ dan $T_a/4$.

a. $x_a(t) = 2\sin(50t)$
b. $x_a(t) = 2\cos(50t+\frac{\pi}{6})$
c. $x_a(t) = 5\sin(100t+\frac{\pi}{3})$

2. Buat sketsa sinyal $x_a(t)$ untuk setiap persamaan sinyal analog pada soal latihan nomor 1 di atas.
3. Tentukan nilai frekuensi f_d dan perioda N pada setiap persamaan sinusoida diskrit berikut, hitunglah nilai $x_d(n)$ pada saat N sama dengan 0, N/8, N/4, N/2 dan N.
   a. $x_d(n) = 5\cos(\frac{2}{3}\pi n)$
   b. $x_a(t) = 5\sin(\frac{1}{2}\pi n + \frac{1}{3}\pi)$
   c. $x_a(t) = 5\cos(\frac{2}{5}\pi n + \frac{1}{4}\pi)$
4. Buat sketsa sinyal $x_a(t)$ untuk setiap persamaan sinyal diskrit pada soal latihan nomor 3 di atas.
5. Tentukan apakah setiap sinyal berikut periodik atau aperiodik? Apabila periodik, tetapkan periode fundamentalnya.
   a. $x_d(n) = \cos 0{,}05\pi\, n$
   b. $x_d(n) = \sin 3n$
   c. $x_d(n) = \cos(\pi \frac{30n}{105})$
   d. $x_a(t) = 3\cos(5t + \sin\frac{\pi}{6})$
   e. $x_d(n) = \cos(n/8).\cos(\pi n/8)$
   f. $x(n) = \cos(\frac{\pi n}{2}) - \sin(\frac{\pi n}{8}) + 3\cos(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3})$

   $$x_a(t) = \frac{\sin(50t)}{\cos(10t)}$$

BAB III

KONVERSI SINYAL

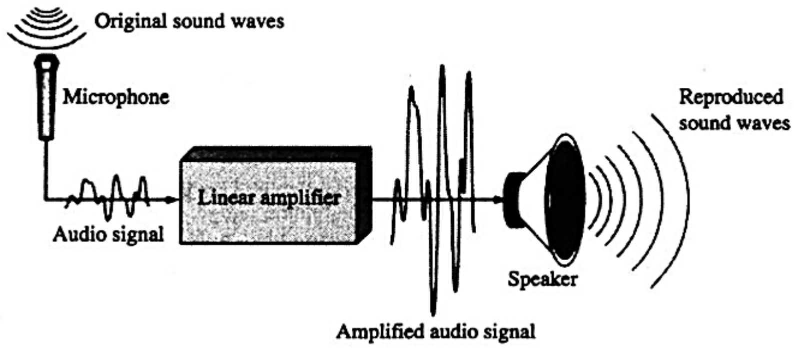
3.1. Tujuan Pembelajaran

Pada akhir perkuliahan ini mahasiswa akan dapat:

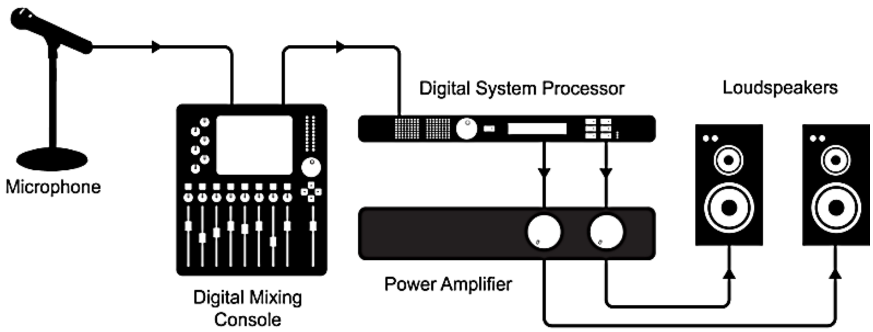
1. Memahami konsep dasar pengolahan sinyal digital meliputi pencuplikan, kuantisasi dan pengkodean.
2. Menjelaskan konsep dasar pengolahan sinyal digital meliputi pencuplikan, kuantisasi dan pengkodean.
3. Memahami dan menjelaskan proses pencuplikan meliputi grafik/ilustrasi sinyal dan rumus-rumus beserta turunannya.
4. Memahami dan menjelaskan proses kuantisasi meliputi grafik/ilustrasi sinyal dan rumus-rumus beserta turunannya.
5. Memahami dan menjelaskan proses pengkodean meliputi grafik/ilustrasi sinyal dan rumus-rumus yang diperlukan.
6. Membuat/menggambar grafik/ilustrasi proses pencuplikan sinyal.
7. Membuat/menggambar grafik/ilustrasi proses kuantisasi sinyal yang dicuplik.
8. Membuat/menggambar grafik/ilustrasi proses pengkodean sinyal yang terkuantisasi.

3.2. Pendahuluan

Sebagian besar sinyal-sinyal untuk maksud praktis, seperti suara, sinyal biologis, sinyal seismik, sinyal radar, sinyal sonar, dan berbagai sinyal komunikasi seperti sinyal audio dan video, adalah sinyal analog. Untuk memproses sinyal analog dengan alat digital, pertama-tama perlu mengkonversinya menjadi bentuk digital, yaitu mengkonversi menjadi suatu deret angka yang mempunyai presisi terbatas. Prosedur ini dinamakan ***konversi analog-ke-digital*** (***A/D***) dan alat pengkonversinya dinamakan ***ADC*** (***Analog-to-Digital Converter***).



Sumber:
https://slideplayer.com/slide/2433690/8/images/9/Analog+Example.jpg



Sumber: http://digitalsoundandmusic.com/wp-content/uploads/2014/05/Figure1-2.gif

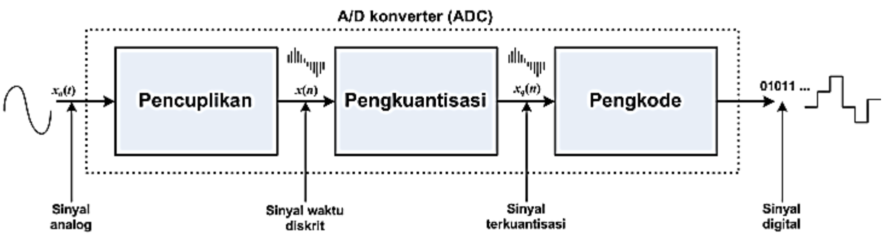
Gambar 3.1 Perbandingan Sistem Analog (Atas) dan Sistem Digital (Bawah) Pada Perangkat Sound System

Dalam banyak kasus, sering diinginkan untuk mengkonversi sinyal digital yang diproses kembali menjadi bentuk analog, misalnya suara. Adalah tidak mungkin kita dapat mendengarkan suara dari barisan cuplikan dari speaker, atau melihat gambar deretan angka-angka biner di TV. Proses konversi sinyal digital menjadi sinyal analog dikenal sebagai ***konversi digital-ke-analog*** **(*D/A*)** dan alat pengkonversinya dinamakan ***DAC*** **(*Digital-to-Analog Converter*)**.

3.3. Konversi Analog-ke-Digital (ADC)

Konversi A/D terbagi dalam tiga-langkah proses, yaitu:

1. **Pencuplikan (*sampling*).** Ini adalah konversi suatu sinyal waktu-kontinu menjadi suatu sinyal waktu-diskrit yang diperoleh dengan mengambil "cuplikan" sinyal waktu-kontinu pada saat waktu diskrit. Jadi jika $x_a(t)$ adalah masukan terhadap pencuplik, keluarannya adalah $x_a(nT_p) \equiv x(n)$ dengan $\boldsymbol{T_p}$ dinamakan **selang pencuplikan**.
2. **Kuantisasi (*Quantization*).** Ini adalah konversi sinyal yang bernilai-kontinu waktu-diskrit menjadi sinyal (digital) bernilai-diskrit waktu-diskrit. Nilai setiap cuplikan sinyal digambarkan dengan suatu nilai terpilih dari himpunan berhingga nilai-nilai yang mungkin. Selisih antara cuplikan $x(n)$ yang tidak terkuantisasi dan keluaran $x_q(n)$ yang terkuantisasi dinamakan **Kesalahan Kuantisasi (*Quantization Error*)**.
3. **Pengkodean (*Coding*).** Dalam proses pengkodean, setiap nilai diskrit $x_q(n)$ digambarkan dengan suatu barisan biner.



Gambar 3.2 Blok diagram dasar ADC

3.4. Pencuplikan Sinyal Analog

Pencuplikan yang digunakan untuk mencuplik sinyal analog dalam bahasan ini adalah **pencuplikan periodik**. Dideskripsikan sebagai:

$$x(n) = x_a(nT_p), \qquad -\infty < n < \infty \tag{3.1}$$

Dengan $x(n)$ adalah sinyal waktu diskrit yang diperoleh dengan "mengambil cuplikan-cuplikan" sinyal analog $x_a(t)$ setiap T detik. Prosedur ini disajikan pada gambar 3.3. Selang waktu T_p antara cuplikan yang berurutan dinamakan **periode pencuplikan** atau **selang cuplikan** dan kebalikannya:

$$\frac{1}{T_p} = F_p \tag{3.2}$$

F_p dinamakan sebagai **laju pencuplikan (cuplikan per detik)** atau **frekuensi pencuplikan**.

Pencuplikan periodik menetapkan suatu hubungan antara variabel waktu t dan n dari sinyal waktu-kontinu dan dari sinyal waktu-diskrit., sebagai:

$$t = nT_p = \frac{n}{F_p} \tag{3.3}$$

Sebagai konsekuensi dari persamaan (3.3), terdapat hubungan antara variabel frekuensi untuk sinyal analog dan variabel frekuensi untuk sinyal diskrit.. Perhatikan sinyal analog sinusoida berikut:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= A\cos(\omega_a t + \theta) \\ x_a(t) &= A\cos(2\pi F_a t + \theta) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Yang bila dicuplik secara periodik pada laju $F_p = 1/T_p$ cuplikan per detik, menghasilkan:

$$\begin{aligned} x_a(nT_p) \equiv x(n) &= A\cos(2\pi F_a n T_p + \theta) \\ &= A\cos(\frac{2\pi F_a n}{F_p} + \theta) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

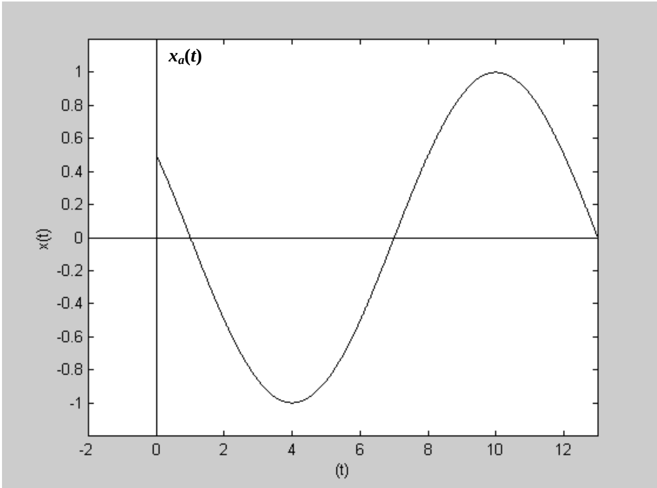
Perhatikan kembali sinyal diskrit sinusoida seperti yang ditulis berikut:

$$\begin{aligned} x(n) &= A\cos(\omega_d n + \theta) \\ x(n) &= A\cos(2\pi F_d n + \theta) \end{aligned} \qquad (3.6)$$

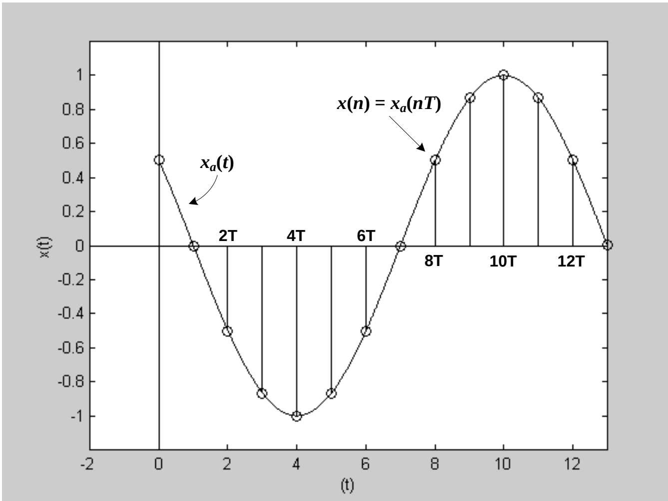
Jika kita membandingkan persamaan (3.5) dan (3.6), variabel frekuensi F_a dan F_d berhubungan secara linear, yaitu:

$$\boxed{F_d = \frac{F_a}{F_p}} \qquad (3.7)$$

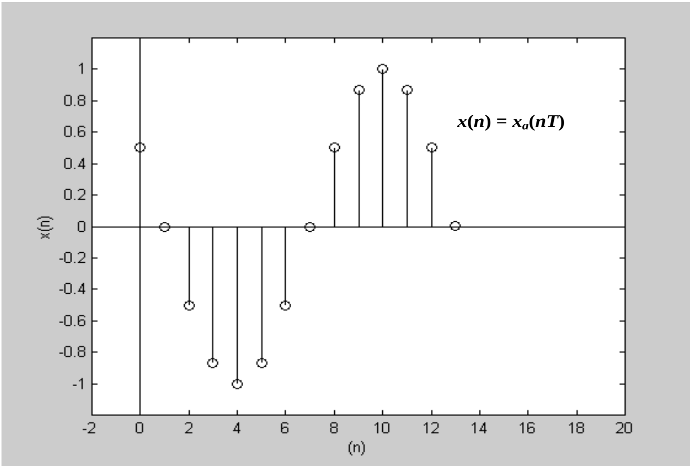
F_a = Frekuensi sinyal analog
F_d = Frekuensi sinyal diskrit



xa(t)
x(t)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
0
2
4
6
8
10
12
(t)



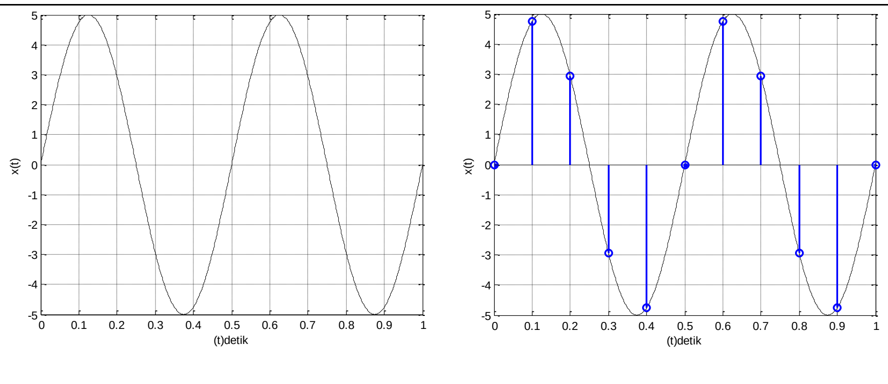
x(n) = xa(nT)
xa(t)
2T
4T
6T
8T
10T
12T
x(t)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
0
2
4
6
8
10
12
(t)



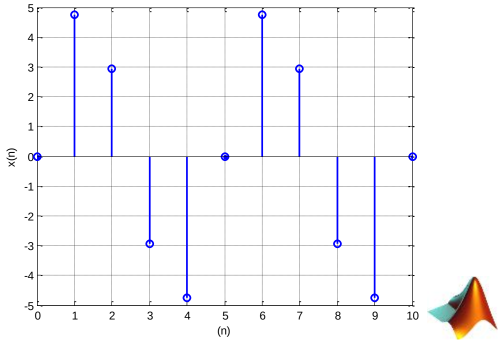
Gambar 3.3 Proses Pencuplikan Periodik Sinyal Analog

Contoh 3.1: Buat ilustrasi grafik untuk sinyal sinusoida $x_a(t) = 5\sin(\omega_a t)$, frekuensi analog = 2 Hz, dicuplik sebanyak 10 cuplikan perdetik.

Penyelesaian Contoh 3.1:
Ilustrasi di tampilkan pada gambar 3.4



(a) (b)



(c)

Gambar 3.4 (a) Sinyal Sinusoida $x_a(t) = 5\sin(\omega_a t)$ (b) Sinyal Sinusoida $x_a(t) = 5\sin(\omega_a t)$ dicuplik dengan 10 cuplikan atau 10 sampling per detik (c) Hasil sampling sinyal sinusoida $x_a(t) = 5\sin(\omega_a t)$ sebanyak 10 cuplikan dalam 1 detik

Karena $F_p = 1/T_p$, maka:

$$F_d = F_a . T_p$$

$$\omega_d = 2\pi F_d = 2\pi F_a T_p$$

$$\omega_d = \omega_a . T_p$$

Seperti yang dibahas pada sub bab 2.5, interval variabel frekuensi sinusoida waktu-kontinu F_a dan frekuensi sinusoida waktu-diskrit F_d adalah:

$$-\infty < F_a < \infty$$

$$-\frac{1}{2} \leq F_d \leq \frac{1}{2} \text{ untuk } -\pi \leq \omega_d \leq \pi,$$

Jika sinusoida waktu-kontinu dicuplik dengan laju frekuensi pencuplikan $F_p = 1/T_p$, frekuensinya harus berada dalam interval:

$$-\tfrac{1}{2} \leq F_d \leq \tfrac{1}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2} \leq F_a . T_p \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2T_p} \le F_a \le \frac{1}{2T_p}} \tag{3.8}$$

Atau:

$$-\frac{1}{2T_p} \le \frac{\omega_a}{2\pi} \le \frac{1}{2T_p} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2\pi}{2T} \le \omega_a \le \frac{2\pi}{2T} \tag{3.9}$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{T} \le \omega_a \le \frac{\pi}{T}}$$

Karena itu, nilai frekuensi tertinggi yang sesuai adalah:

$$\boxed{F_{a\,maks} = \frac{1}{2T} = \frac{F_p}{2}} \tag{3.10}$$

$$\boxed{\omega_{a\,maks} = \frac{\pi}{T} = \pi.F_p} \tag{3.11}$$

Untuk melihat apa yang terjadi dengan frekuensi-frekuensi di atas $F_p/2$, mari kita perhatikan contoh soal berikut.

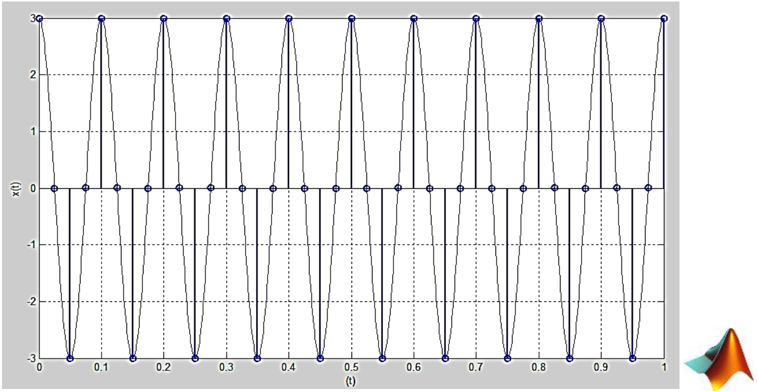
Contoh 3.2: Diberikan dua sinyal sinusoida analog:

$$x_1(t) = 3\cos 2\pi(10)t$$

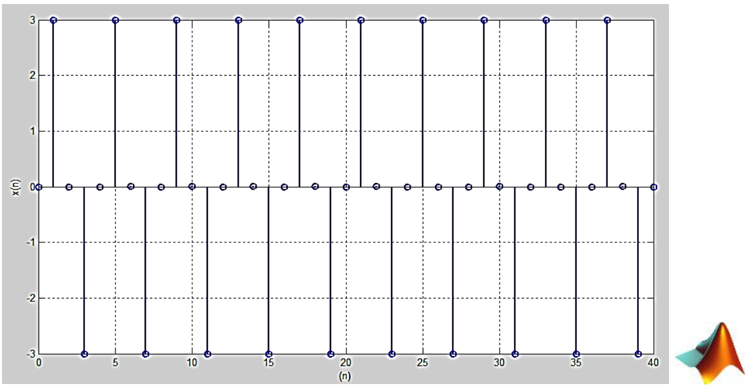
$$x_2(t) = 3\cos 2\pi(50)t$$

Sinyal dicuplik dengan laju F_p = 40 Hz. Buat ilustrasi hasil pencuplikan dari setiap sinyal.

Penyelesaian:

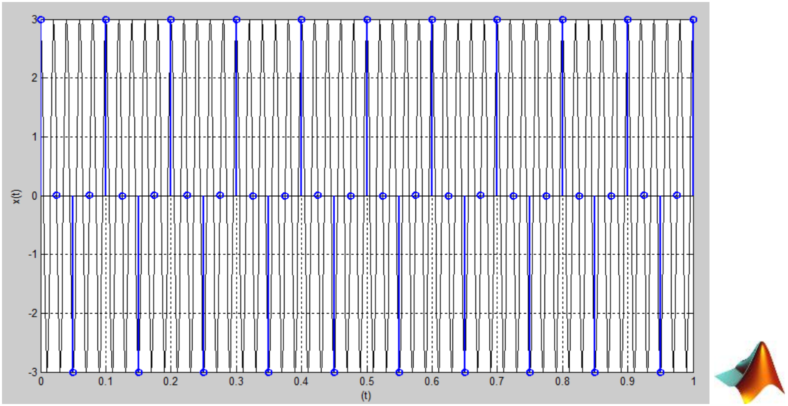


(a)

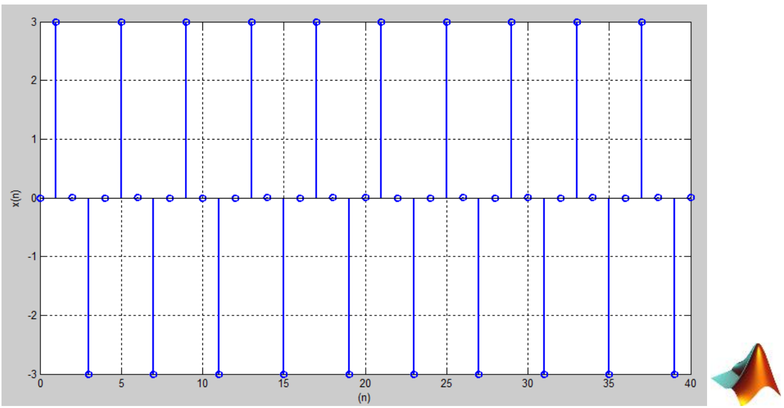


(b)

Gambar 3.5 (a) Sinyal Sinusoida $x_a(t) = 3\cos(2\pi 10t)$ dengan Frekuensi Pencuplikan 40 Hz (b) Hasil Pencuplikan Sinyal Sinusoida $x_a(t) = 3\cos(2\pi 10t)$ dengan Frekuensi Pencuplikan 40 Hz



(a)



(b)

Gambar 3.6 a. Sinyal Sinusoida $x_a(t) = 3\cos(2\pi 50t)$ dengan Frekuensi Pencuplikan 40 Hz (b) Hasil Pencuplikan Sinyal Sinusoida $x_a(t) = 3\cos(2\pi 50t)$ dengan Frekuensi Pencuplikan 40 Hz

Hasil pencuplikan kedua sinyal (gambar 3.5 b dan 3.6 b) memiliki hasil yang sama. Analisisnya adalah sebagai berikut:

$x_1(t) = \cos 2\pi(10)t$ ➔ F_{a1} = 10 Hz ; $F_{a1} < F_p/2$

$x_2(t) = \cos 2\pi(50)t$ ➔ F_{a2} = 50 Hz ; $F_{a2} > F_p/2$

Yang dicuplik dengan laju F_p = 40 Hz. Maka sinyal waktu-diskrit yang dihasilkan adalah:

$$x_1(n) = \cos 2\pi\left(\frac{10}{40}\right)n = \cos\frac{\pi}{2}n$$
$$x_2(n) = \cos 2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n = \cos\frac{5\pi}{2}n$$

Padahal, $\cos\frac{5\pi}{2}\mathrm{n} = \cos\left(2\pi\mathrm{n} + \frac{\pi}{2}\mathrm{n}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\mathrm{n}$, artinya kedua sinyal tersebut adalah identik. Bisa dikatakan ***$x_1(t)$* adalah alias dari *$x_2(t)$*** dengan laju pencuplikan F_p = 40 Hz, atau 40 cuplikan per-detik. Namun sinyal $x_3(t)$, $x_4(t)$,...,dst pada frekuensi f_{a3} = 90 Hz, f_{a4} = 130 Hz,... dst, juga merupakan alias dari sinyal $x_1(t)$. Dikenal sebagai **fenomena pengaliasan (*aliasing*).**

Secara umum, sinyal sinusoida waktu-kontinu

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_a t + \theta) \tag{3.12}$$

Yang dicuplik dengan laju pencuplikan F_p = $1/T_p$, dan menghasilkan sinyal sinusoida waktu-diskrit

$$x(n) = A\cos(2\pi F_d n + \theta) \tag{3.13}$$

Sebaliknya, jika sinusoida

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_k t + \theta) \tag{3.14}$$

➔ $F_k = F_a + kF_p, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Dicuplik dengan laju pencuplikan F_p, maka sinyal waktu-diskrit yang dihasilkan adalah,

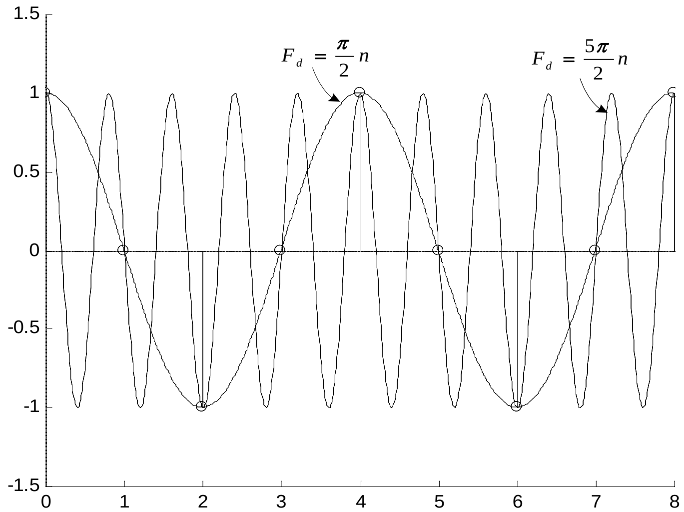
$$x(n) = x_a(nT) \quad = \quad A\cos\left(2\pi \frac{F_a + kF_p}{F_p} n + \theta\right)$$

$$x(n) = x_a(nT) \quad = \quad A\cos\left(2\pi \frac{F_a}{F_p} n + 2\pi kn + \theta\right) \tag{3.15}$$

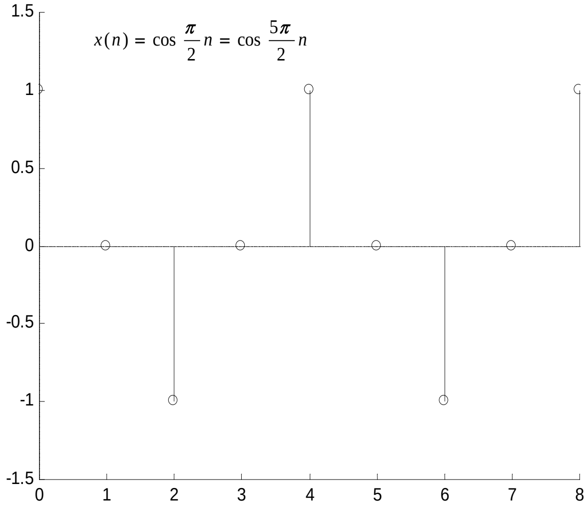
$$= \quad A\cos(2\pi F_d n + 2\pi kn + \theta)$$

$$= \quad A\cos(2\pi F_d n + \theta)$$

Persamaan (3.13) adalah identik dengan (3.15).



Gambar 3.7 Ilustrasi Pengaliasan



Gambar 3.8 Sinyal Diskrit yang Sama-Sama Dihasilkan oleh Kedua Sinyal pada Gambar 3.7

Karena itu lah, apabila sinyal sinusoida waktu-kontinu memiliki frekuensi lebih dari nilai maksimal untuk $F_{maks} = F_p/2$ dan $\omega_{a\ maks} = \pi/T$, akan terjadi kerancuan untuk sinyal diskrit, sulit menentukan sinyal diskrit adalah cuplikan dari sinyal yang mana.

3.5. Teorema Pencuplikan

Dari pengetahuan kita tentang F_{a_maks}, kita dapat memilih laju pencuplikan yang tepat. Kita mengetahui bahwa frekuensi tertinggi dalam suatu sinyal analog yang dapat dikonstruksikan kembali bila sinyal dicuplik pada laju $F_p = 1/T_p$ adalah F_p / 2. Setiap frekuensi di atas F_p / 2 atau dibawah – F_p / 2, menghasilkan cuplikan yang identik dengan frekuensi yang sesuai dalam interval $-\frac{F_p}{2} \leq F_a \leq \frac{F_p}{2}$. Untuk menghindari hasil dualisme dari pengaliasan ini kita harus memilih laju pencuplikan yang cukup tinggi. Yakni kita harus memilih F_p / 2 lebih besar daripada F_{a_maks}, yakni:

$$\frac{F_p}{2} > F_{a\_maks} \qquad (3.16)$$

Jika frekuensi tertinggi yang dimiliki suatu sinyal analog $x_a(t)$ adalah F_{a_maks} = B dan sinyal dicuplik dengan laju $F_p > 2F_{a\_maks}$, maka laju pencuplikan minimum adalah $F_p = 2F_{a\_maks} = 2B$. Laju pencuplikan,

$$F_N = 2F_{a\_maks} = 2B \qquad (3.17)$$

dinamakan **Laju Nyquist**.

3.6. Kuantisasi Sinyal Analog

3.6.1. Kuantisasi Sinyal Kontinu

Seperti yang telah kita pelajari, sinyal digital adalah deret angka-angka (cuplikan) yang setiap angkanya digambarkan dengan angka digit berhingga (presisi berhingga).

Proses pengkonversian suatu sinyal amplitudo-kontinu waktu-diskrit menjadi sinyal digital dengan menyatakan setiap nilai cuplikan sebagai suatu angka digit, dinamakan **kuantisasi**.

Ditunjukkan operasi pengkuantisasi pada cuplikan $x(n)$ sebagai $Q[x(n)]$ dan $x_q(n)$ menunjukkan deret cuplikan terquantisasi pada keluaran pengkuantisasi. Sehingga,

$$\boxed{x_q(n) = Q[x(n)]} \qquad (3.18)$$

Maka kesalahan kuantisasi adalah deret $e_q(n)$ yang didefinisikan sebagai selisih antara nilai terkuantisasi dan nilai sebenarnya. Jadi,

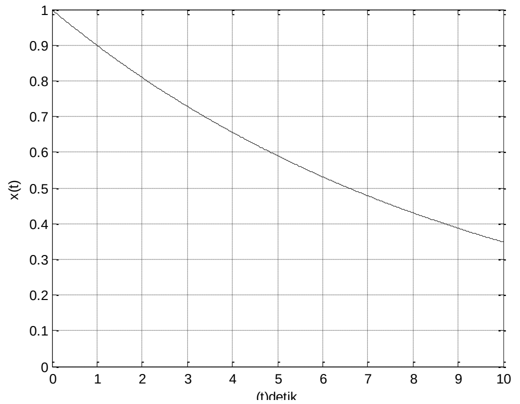
$$\boxed{e_q(n) = x_q(n) - x(n)} \qquad (3.19)$$

Kita mengilustrasikan proses kuantisasi dengan sebuah contoh.

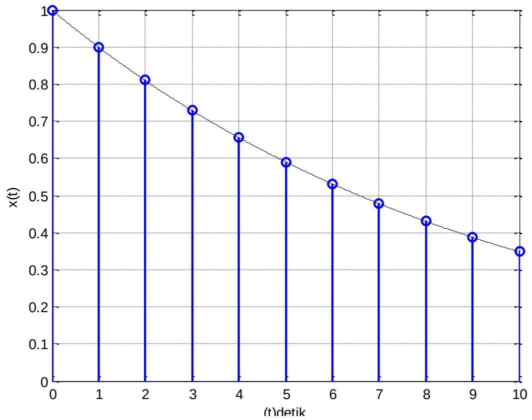
Contoh 3.3 Sinyal waktu diskrit:

$$x(n) = \begin{cases} 0{,}9^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

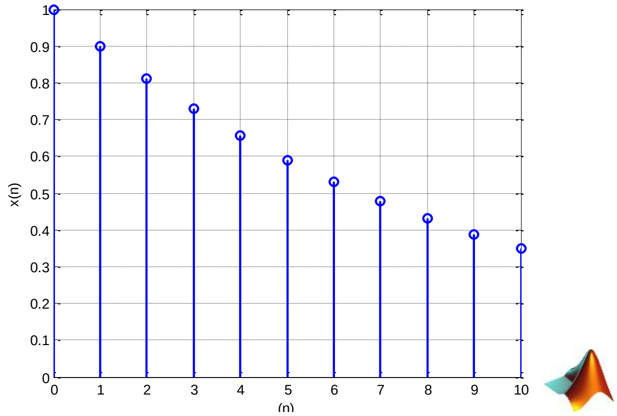
Yang didapat dengan pencuplikan sinyal eksponensial analog $x_a(t) = 0{,}9^t$ dengan $F_p = 1$ Hz. Proses kuantisasi ditunjukkan pada gambar 3.9 gambar 3.10 dan tabel 3.1.



(a)

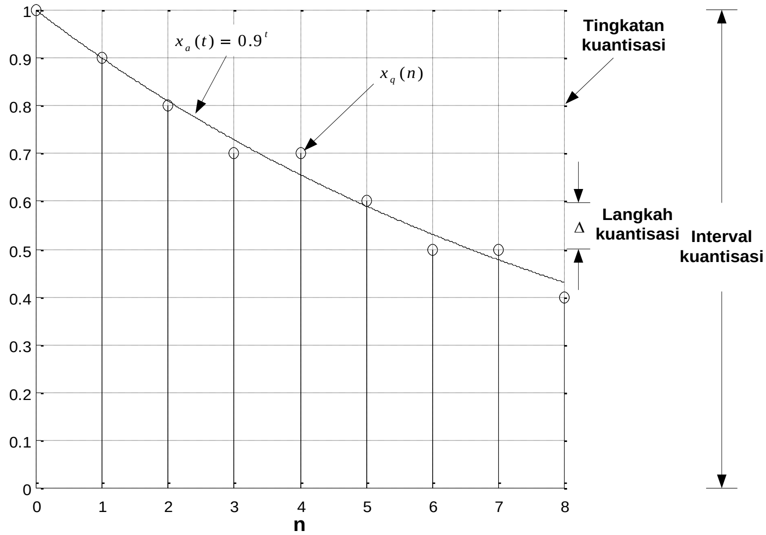


(b)



(c)

Gambar 3.9 a. Ilustrasi Sinyal $x_a(t) = 0.9^t$ b. Sampling $x_a(t) = 0.9^t$ dengan Frekuensi F_p = 1 Hz c. Hasil Sampling $x_a(t) = 0.9^t$ dengan Frekuensi F_p = 1 Hz



Gambar 3.10 Ilustrasi Kuantisasi Contoh 3.3

Tabel 3.1 memperlihatkan nilai-nilai 10 cuplikan pertama.

Tabel 3.1 Ilustrasi Numerik Kuantisasi dengan Satu Digit Signifikan

Menggunakan Pembulatan Ke Atas Dan Pembulatan Ke Bawah (Contoh 3.1)

n	x(n) Sinyal Diskrit	$x_q(n)$ (Pembulatan ke bawah)	$x_q(n)$ (Pembulatan ke atas)	$e_q(n) = x_q(n)-x(n)$ (Pembulatan ke atas)
0	1	1.0	1.0	0.0
1	0.9	0.9	0.9	0.0
2	0.81	0.8	0.8	-0.01
3	0.729	0.7	0.7	-0.029
4	0.6561	0.6	0.7	0.439
5	0.59049	0.5	0.6	0.00951
6	0.531441	0.5	0.5	0.031441
7	0.4782969	0.4	0.5	0.021031
8	0.43046721	0.4	0.4	-0.03046721
9	0.387420489	0.3	0.4	0.012579511

Proses pembulatan disajikan secara grafis pada gambar 3.10. Penjelasan istilah dalam gambar 3.10, yaitu:

- **tingkatan kuantisasi** adalah nilai-nilai yang mungkin pada sinyal digital.
- **Δ** adalah ukuran langkah kuantisasi atau resolusi.

Kesalahan kuantisasi $e_q(n)$, pada pembulatan dibatasi pada interval:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq e_q(n) \leq \frac{\Delta}{2} \tag{3.20}$$

$$\Delta = \frac{x_{maks} - x_{\min}}{L-1} \tag{3.21}$$

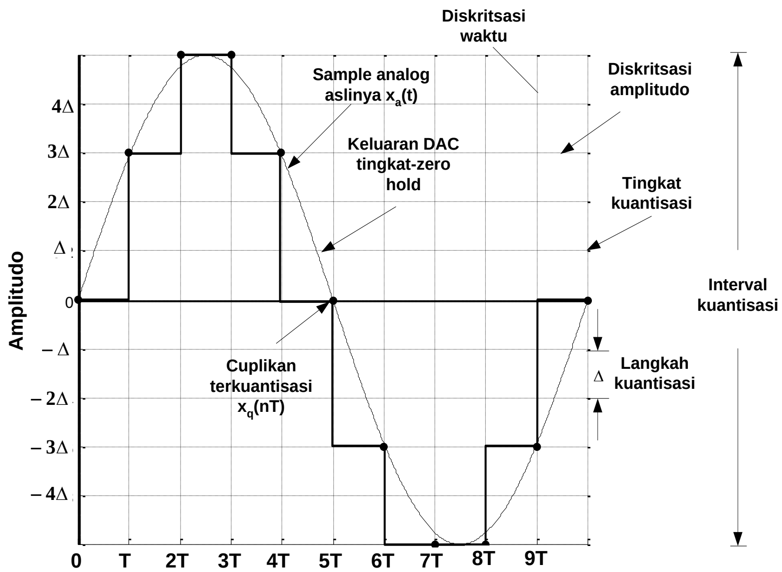
x_{min} dan x_{maks}	=	menyatakan nilai x(n) minimum dan maksimum
L	=	jumlah tingkatan kuantisasi
x_{maks} - x_{min}	=	interval dinamis

Dalam contoh 3.3, kita mempunyai x_{maks} = 1, x_{min} = 0, dan L = 11, sehingga Δ = 0,1. Perhatikan persamaan (3.21), jika interval dinamis tetap, penambahan jumlah tingkatan kuantisasi L

menghasilkan pengurangan ukuran langkah kuantisasi. Jadi kesalahan kuantisasi berkurang dan ketepatan (ketelitian) pengkuantisasi bertambah. Secara praktis kita data mengurangi kesalahan kuantisasi terhadap angka yang penting dengan memilih jumlah tingkatan kuantisasi yang cukup.

3.6.2. Kuantisasi Sinyal Sinusoida

Gambar 3.11 menyajikan pencuplikan dan kuantisasi sinyal sinusoida analog $x_a(t) = A\cos\omega_a t$.



Gambar 3.11 Pencuplikan dan Kuantisasi Sinyal Sinusoida

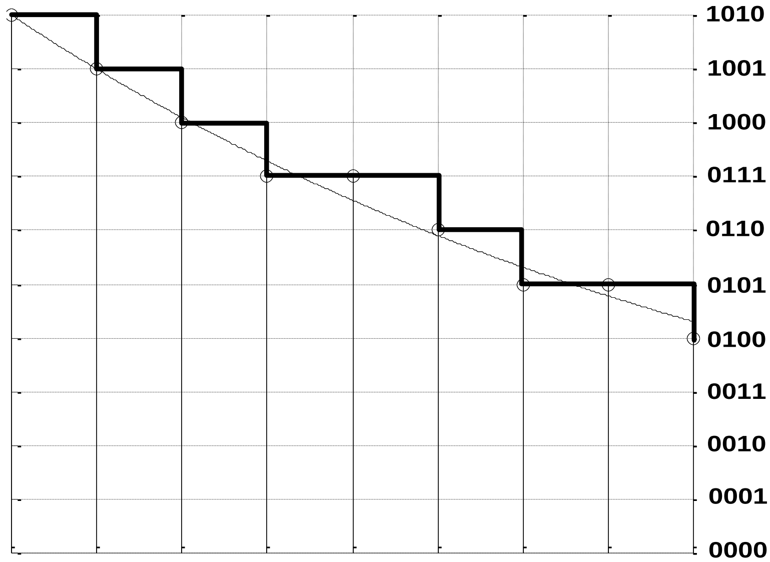
Dari sinyal analog $x_a(t)$ yang asli, kita memperoleh sinyal waktu diskrit $x(n) = x_a(nT)$ dengan pencuplikan dan waktu-diskrit, sinyal amplitudo-diskrit $x_q(nT)$ setelah θ kuantisasi. Jika laju pencuplikan F_p memenuhi teorema pencuplikan, kuantisasi merupakan kesalahan saja dalam proses konversi A/D. Jadi kita dapat mengkonversi kesalahan kuantisasi dengan mengkuantisasi sinyal analog $x_a(t)$ sebagai ganti sinyal waktu-diskrit $x(n) = x_a(nT)$.

3.7. Pengkodean Cuplikan Terkuantisasi (*Coding*)

Proses pengkodean dalam ADC memberikan suatu angka biner yang unik untuk setiap tingkatan kuantisasi. Jika kita mempunyai L tingkatan kuantisasi, kita perlu sekurang-kurangnya L angka biner yang berbeda. Dengan panjang kata b bit, kita dapat menciptakan 2^b angka biner yang berbeda. Karena itu kita mempunyai,

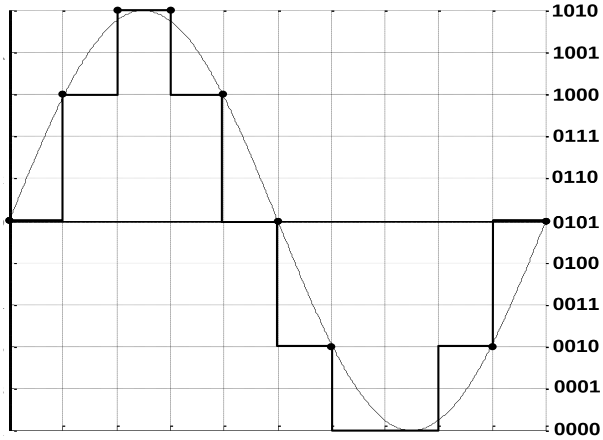
$$2^b \geq L \qquad \text{atau} \qquad b \geq \log_2 L \tag{3.22}$$

Jadi jumlah bit yang diperlukan dalam pengkode adalah integer terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan $\log_2 L$.



Gambar 3.12 Contoh Pengkodean Cuplikan Terkuantisasi (Coding)

Contoh 3.3

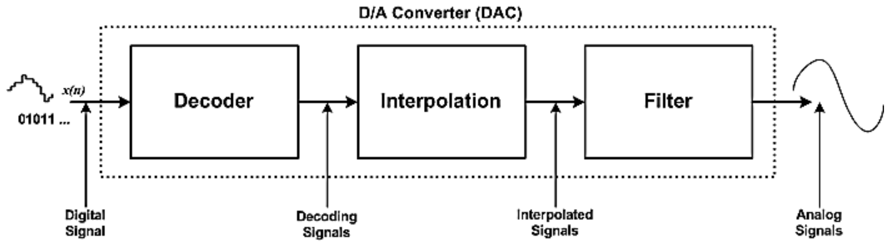


Gambar 3.32 Contoh Pengkodean Cuplikan Terkuantisasi (Coding) Gambar 3.11

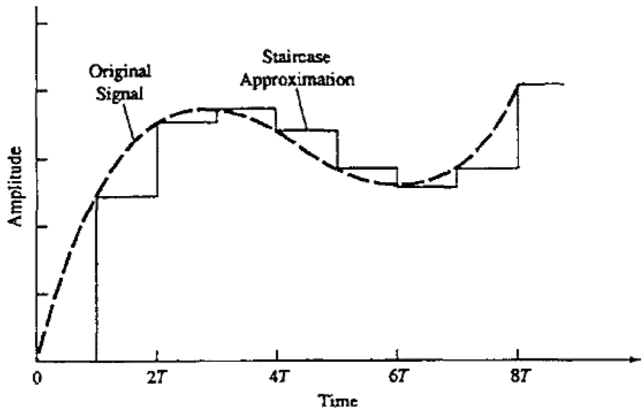
Dalam contoh 3.1, karena L = 11, maka agar memenuhi persamaan (3.22) harga b = 4 bit. Untuk itu, kita harus mencari ADC dengan jumlah bit kode minimal 4 bit. Secara praktis, sinyal deret tangga $x_q(t)$ dapat diperoleh dengan menggunakan cara ***zero-order hold*** dimana nilai konstan cuplikan ditahan sampai cuplikan berikutnya diterima.

3.8. Konversi Digital-ke-Analog (DAC)

Untuk mengkonversi sinyal digital menjadi sinyal analog dapat dilakukan dengan menginterpolasi cuplikan, dari cuplikan yang satu ke cuplikan yang berikutnya. Ketelitian interpolasi bergantung pada kualitas proses konversi.

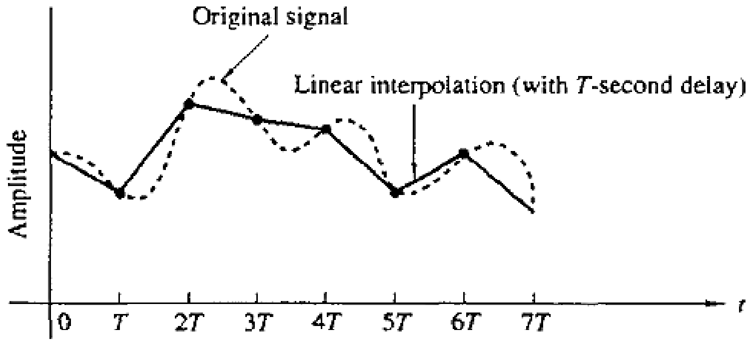


Gambar 3.33 Blok Diagram Dasar DAC



Gambar 3.34 Konversi Digital ke Analog dengan Metode Zero Order Hold

Gambar 3.34 mengilustrasikan suatu bentuk konversi DAC sederhana, yang dinamakan *zero order hold* atau pendekatan tangga, yaitu menahan nilai konstan cuplikan sampai cuplikan lainnya diterima. Pendekatan lain yang bisa digunakan seperti menghubungkan suatu pasangan cuplikan berurutan secara linear (interpolasi linear), yaitu menghubungkan cuplikan berurutan dengan potongan garis lurus. Pendekatan-pendekatan lain yang mungkin, seperti menempatkan suatu kurva kuadratik dengan tiga cuplikan berurutan (interpolasi kuadratik), dan seterusnya.



Gambar 3.35 Interpolasi Linear dengan Waktu Tunda T Detik

3.9. Soal-Soal Latihan Bab III

1. Diketahui persamaan sinyal sinusoida analog: $x_a(t) = 3\sin(100.\pi.t)$
   a. Buatlah sketsa sinyal $x_a(t)$ untuk $0 \le t \le 30$ ms
   b. Sinyal $x_a(t)$ dicuplik dengan laju pencuplikan $F_p = 300$ cuplikan/s. Tentukan frekuensi sinyal waktu-diskrit $x(n) = x_a(nT)$, $T = 1/F_p$, dan perlihatkan bahwa sinyal tersebut periodik.
   c. Hitunglah nilai-nilai cuplikan dalam satu periode $x(n)$. Buatlah sketsa $x(n)$ pada diagram yang sama dengan $x_a(t)$. Berapa periode sinyal waktu-diskrit dalam milisekon?
   d. Dapatkah anda mencari laju pencuplikan F_p sehingga sinyal $x(n)$ mencapai nilai puncak dari 3? Berapa F_p minimum yang sesuai untuk kondisi ini?
2. Diketahui persamaan sinyal sinusoida analog,

   $$x_a(t) = 8\cos(40.\pi.t + \frac{1}{6}\pi)$$

   a. Berapa frekuensi analognya?
   b. Hitunglah perioda sinyal analog (T) dalam ms
   c. Buatlah sketsa sinyal pada interval waktu $0 \le t \le 150$ ms
   d. Sinyal xa(t) dicuplik dengan laju pencuplikan Fp = 100 cuplikan/s. Tentukan frekuensi sinyal waktu-diskrit (Fd)

e. Berapa frekuensi fundamental untuk sinyal diskrit (N)?
f. Hitunglah nilai-nilai cuplikan x(n) sampai cuplikan ke-N.
g. Buatlah sketsa sinyal diskrit xd(n) sampai cuplikan ke-N.
h. Berapa Fp minimum yang sesuai untuk kondisi ini?
i. Jika sinyal diproses menggunakan ADC-DAC 4 bit tentukan:
   - Langkah kuantisasi sinyal (Δ)
   - Sinyal diskrit setelah dikuantisasi
   - Deretan angka biner ke DAC
j. Dengan menggunakan MATLAB,
   - Simulasikan sketsa sinyal yang dibuat di (c) dan (g)
   - Tampilkan hasil (f) dan (i)

3. Suatu sinyal analog berisi frekuensi hingga 10 KHz.
   a. Berapakah interval frekuensi pencuplikan yang diizinkan untuk menyusun ulang sinyal ini secara tepat dari cuplikannya.
   b. Anggaplah bahwa kita mencuplik sinyal ini dengan frekuensi pencuplikan F_p = 8 kHz. Periksalah apa yang terjadi untuk frekuensi F_1 = 5 kHz.
   c. Ulangi bagian (b) untuk frekuensi F_2 = 9 kHz.
4. Suatu sinyal elektrokardiogram (ECG) analog mempunyai frekuensi yang berguna sampai 100 Hz.
   a. Berapa laju Nyquist untuk sinyal ini.

   Anggaplah bahwa kita mencuplik sinyal ini dengan laju 250 cuplikan/s. Berapakah frekuensi tertinggi yang dapat ditampilkan secara unik pada laju pencuplikan ini?

BAB IV

SINYAL WAKTU-DISKRIT

4.1. Tujuan Pembelajaran

1. Memahami dan menjelaskan definisi beberapa sinyal waktu-diskrit elementer meliputi, *impulse unit, step unit, ramp unit* serta persamaan-persamaannya.
2. Memahami dan menjelaskan beberapa klasifikasi sinyal waktu-diskrit meliputi, sinyal periodik/non-periodik dan sinyal simetri/antisimetri serta persamaan-persamaannya.
3. Membuat/menggambar grafik/ilustrasi beberapa sinyal waktu-diskrit elementer meliputi, *impulse unit, step unit, ramp unit*.
4. Membuat/menggambar grafik/ilustrasi beberapa contoh sinyal simetri dan sinyal antisimetri.
5. Memahami dan menjelaskan beberapa cara manipulasi sederhana pada sinyal waktu/diskrit meliputi transformasi variabel bebas, penambahan, perkalian dan penambahan skala barisan serta rumus-rumusnya.
6. Memahami, menjelaskan dan membuat diagram blok sistem waktu-diskrit meliputi penambah, penjumlah, pengurang, pengali konstan, pengali sinyal, elemen tunda unit dan elemen pemaju unit.
7. Memahami dan menjelaskan klasifikasi beberapa sistem waktu-diskrit meliputi, sistem invarian-waktu/varian-waktu dan sistem linear/non-linear, serta persamaan-persamaannya..

8. Memahami, menjelaskan dan membuat diagram blok sistem waktu-diskrit meliputi, sistem invarian-waktu/varian-waktu dan sistem linear/non-linear.

4.2. Beberapa Sinyal Waktu-Diskrit Elementer

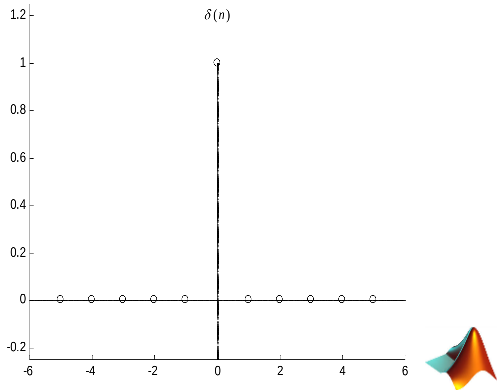
Seperti yang kita bahas pada bab sebelumnya, sinyal waktu-diskrit $x(n)$ merupakan fungsi dari variable bebas yaitu suatu integer. Penting untuk diperhatikan bahwa tidak benar jika dikatakan bahwa $x(n)$ sama dengan nol jika n bukan integer. Sinyal waktu-diskrit ***tidak didefinisikan*** di antara dua cuplikan yang berurutan. Sinyal waktu-diskrit juga ***tidak didefinisikan*** untuk nilai n bukan integer.

Terdapat sejumlah sinyal dasar yang sering muncul dan memainkan peran penting. Sinyal-sinyal tersebut didefinisikan sebagai berikut.

1. ***Impulse Unit.*** Ditunjukkan sebagai $\delta(n)$ dan didefinisikan sebagai:

$$\delta(n) \equiv \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 0 \\ 0, & \text{untuk } n \neq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Impulse unit adalah satuan sinyal yang nolnya dimana-mana, kecuali pada n = 0 yang mempunyai nilai satuan. Tampilan grafik $\delta(n)$ diperlihatkan pada gambar 4.1.

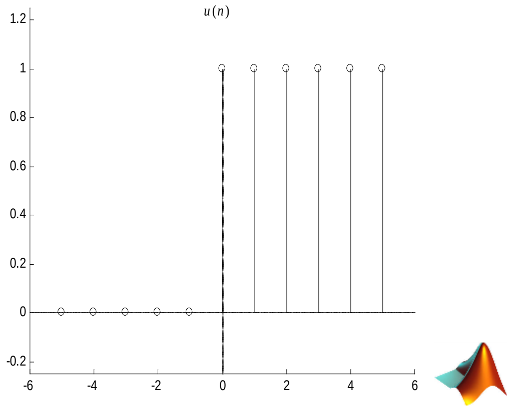


Gambar 4.1 Tampilan Grafis Sinyal *Impulse Unit*

2. ***Step Unit.*** Ditunjukkan dengan $u(n)$ dan didefinisikan sebagai:

$$u(n) \equiv \begin{cases} 1, & \text{untuk } n \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } n < 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Gambar 4.2 mengilustrasikan sinyal *unit step*.



Gambar 4.2 Tampilan Grafis Sinyal *Step Unit*

3. ***Ramp Unit*****.** Ditunjukkan sebagai u,(n) dan didefinisikan sebagai:

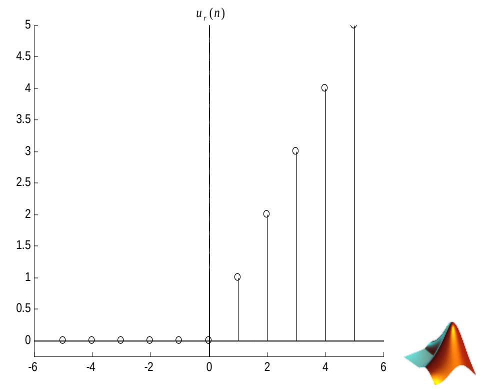
$$u_r(n) \equiv \begin{cases} n, & \text{untuk } n \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } n < 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Sinyal ini diilustrasikan pada gambar 4.3

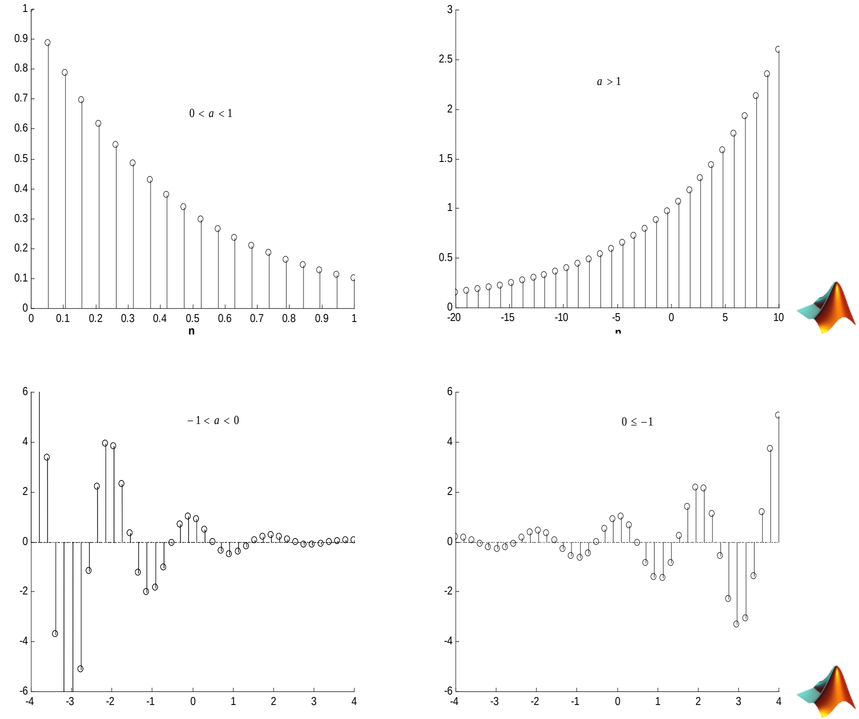
4. **Sinyal Eksponensial** adalah suatu barisan dengan bentuk

$$x(n) = a^n \qquad \text{untuk seluruh } n \tag{4.4}$$

Gambar 4.4 mengilustrasikan x(n) untuk berbagai nilai parameter *a*.



Gambar 4.3 Tampilan Grafis Sinyal *Ramp Unit*



Gambar 4.4 Tampilan Grafis Sinyal Eksponensial

4.3. Klasifikasi Sinyal Waktu-Diskrit

Model matematis yang dipakai untuk analisis sinyal dalam bab ini bergantung pada karakteristik sinyal. Kita menggolongkan sinyal waktu-diskrit sesuai dengan jumlah karakteristik yang berbeda.

1. **Sinyal Periodik dan Sinyal Non-Periodik**

Seperti yang dibahas dalam bab sebelumnya, dengan periode *N* dan *N* > 0, sinyal x(n) periodik jika dan hanya jika,

$$x(n) = x(n + N) \qquad \text{untuk seluruh } n \qquad (4.5)$$

Nilai terkecil dari *N* untuk persamaan (4.5) yang berpengaruh dinamakan periode dasar atau periode fundamental. Jika tidak ada nilai *N* yang memenuhi persamaan (4.5), sinyal dinamakan *Sinyal Non-Periodik* atau *Aperiodik*.

2. **Sinyal Simetri (genap) dan Antisimetri (ganjil).**

Sinyal x(n) simetri (genap) jika,

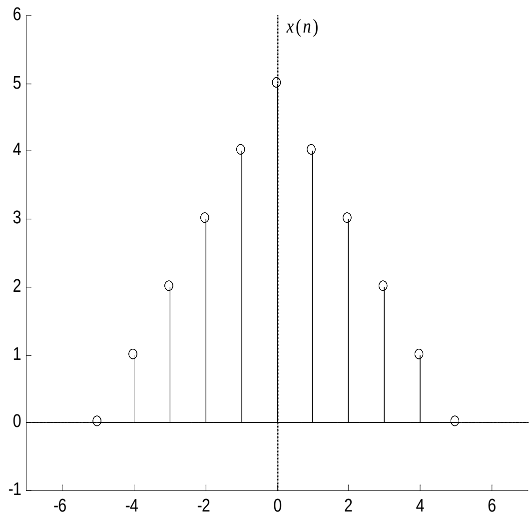
$$x(-n) = x(n) \tag{4.6}$$

Sebaliknya, sinyal x(n) dinamakan antisimetri (ganjil) jika,

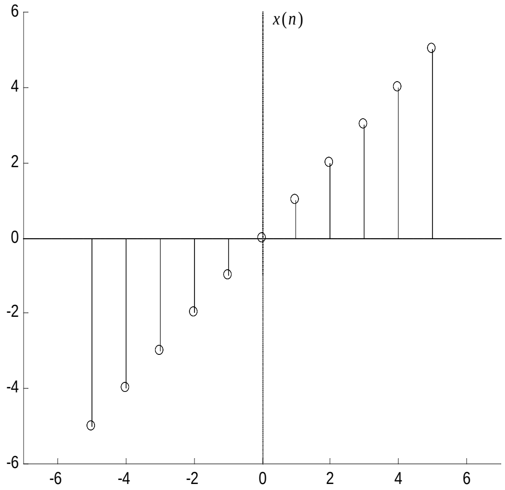
$$x(-n) = -x(n) \tag{4.7}$$

Komponen sinyal genap dibentuk dengan menambah x(n) ke x(-n) kemudian dibagi 2, yakni,

$$x_{genap}(n) = \frac{1}{2}[(x(n) + x(-n)] \tag{4.8}$$



Gambar 4.5 Contoh Sinyal Simetri (Genap)



Gambar 4.6 Contoh sinyal Asimetri (ganjil)

Jelasnya, $x_{genap}(n)$ memenuhi kondisi simetris persamaan (4.6). Dengan cara yang sama, kita membentuk komponen sinyal yang ganjil $x_{ganjil}(n)$ menurut hubungan,

$$x_{ganjil}(n) = \frac{1}{2}[(x(n) - x(-n)] \qquad (4.9)$$

Juga cukup jelas bahwa $x_{ganjil}(n)$ memenuhi persamaan (4.7). Sekarang jika kita menambahkan kedua komponen sinyal yang didefinisikan pada persamaan (4.8) dan (4.9), kita memperoleh x(n) yakni,

$$x(n) = x_{genap}(n) + x_{ganjil}(n) \qquad (4.10)$$

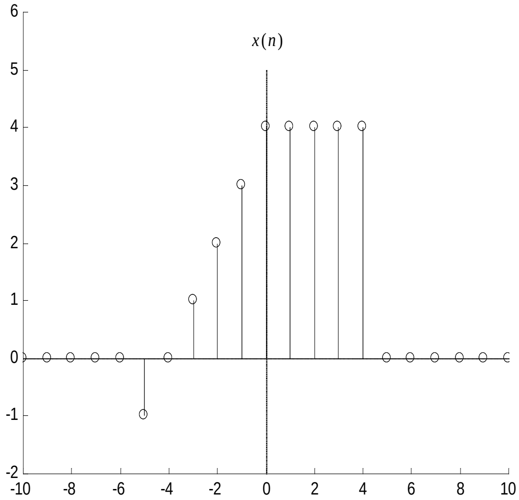
4.4. Manipulasi Sederhana Pada Sinyal Waktu-Diskrit

Dalam bagian ini kita meninjau beberapa modifikasi atau manipulasi sederhana yang meliputi variabel bebas (waktu) dan variabel tidak bebas (amplitudo sinyal).

4.4.1. Transformasi Variabel Bebas (Waktu)

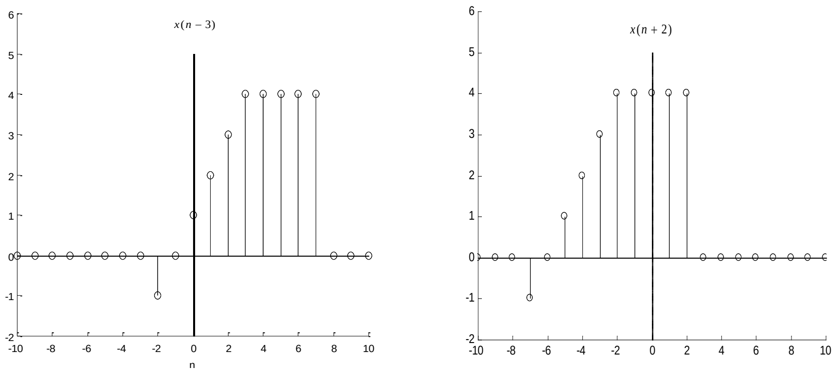
Sinyal x(n) dapat digeser menurut waktu dengan memindahkan variabel bebas n dengan $n - k$, dengan k adalah integer. Jika k integer positif, pergeseran waktu menghasilkan *delay* (tunda) pada sinyal dengan k satuan waktu. Jika k integer negatif, pergeseran waktu menghasilkan penambahan pada sinyal dengan $|k|$ satuan waktu, dimana sinyal mendahului sejauh k. Untuk lebih jelasnya, kita tinjau contoh-contoh persoalan.

Contoh 4.1. Suatu sinyal x(n) diilustrasikan secara grafik pada gambar 4.7. Perlihatkan ilustrasi grafik sinyal x(n – 3) dan x(n + 2).



Gambar 4.7 Ilustrasi Sinyal Diskrit x(n) untuk Contoh 4.1

Penyelesaian Contoh 4.1:



(a) (b)

Gambar 4.8 Ilustrasi Sinyal Diskrit untuk Penyelesaian Contoh 4.1. (a) Operasi Waktu Tunda *x*(*n*-3) ; (b) Operasi Waktu Mendahului *x*(*n* +2)

Sinyal x(n – 3) diperoleh dengan menunda x(n) tiga satuan waktu. Sebaliknya, sinyal x(n + 2) diperoleh dengan mendahului x(n) dua satuan waktu. Penundaan sesuai dengan pergeseran sinyal ke kanan, sedangkan mendahului memberi pergeseran sinyal ke kiri pada sumbu waktu. Diilustrasikan

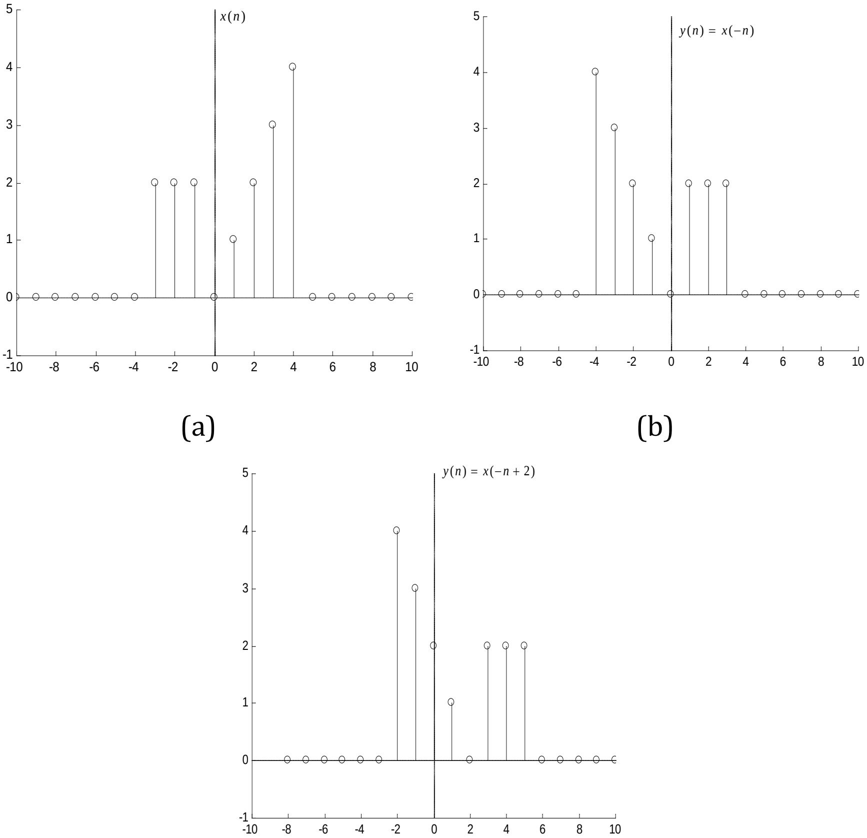
Contoh 4.2 Perlihatkan penggambaran grafik sinyal x(-n) dan x(-n+2), dengan x(n) adalah sinyal yang diilustrasikan pada gambar 4.9 (a)

Penyelesaian Contoh 4.2:

Sinyal baru y(n) = x(-n), diperlihatkan pada gambar 4.9(b). Perhatikan bahwa,

$$y(0) = x(0) \quad ; y(1) = x(-1) \quad ; y(2) = x(-2) \ ;$$
$$y(-1) = x(1) \ ; y(-2) = x(2) \ ; \ \text{.... dst}$$

Oleh karena itu x(-n) adalah pencerminan dari x(n).



(a) (b)

(c)

Gambar 4.9 Ilustrasi Sinyal Diskrit Untuk Penyelesaian Contoh 4.2

(a) x(n) ; (b) x(-n) ; (c) x(-n +2)

4.4.2. Modifikasi Variabel Tak Bebas (Penambahan, Perkalian dan Pembuatan Skala Barisan)

Modifikasi amplitudo ini termasuk penambahan, perkalian dan pembuatan skala sinyal waktu-diskrit.

Pembuatan skala amplitudo sinyal dengan suatu konstanta A diselesaikan dengan mengalikan nilai setiap cuplikan sinyal dengan A. Konsekuensinya, kita memperoleh:

$$y(n) = Ax(n) \qquad -\infty < n < \infty \qquad (4.11)$$

Jumlah dua sinyal $x_1(n)$ dan $x_2(n)$ adalah sinyal y(n), yang nilainya pada setiap saat sama dengan jumlah nilai dari kedua sinyal ini pada saat itu, yakni:

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) \qquad -\infty < n < \infty \qquad (4.12)$$

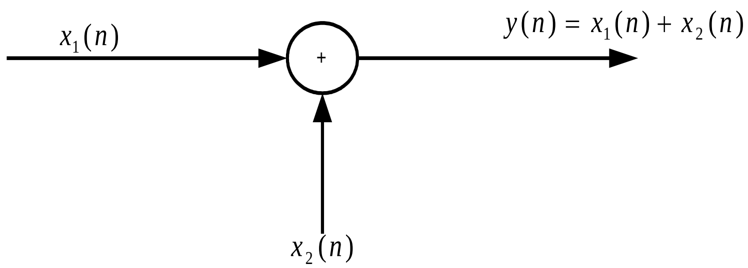
Perkalian dua sinyal didefinisikan dengan cara yang sama dengan dasar cuplikan-ke-cuplikan sebagai dua sinyal didefinisikan dengan cara yang sama dengan dasar cuplikan-ke-cuplikan sebagai:

$$y(n) = x_1(n)x_2(n) \qquad -\infty < n < \infty \qquad (4.13)$$

4.5. Diagram Blok Sistem Waktu-Diskrit

1. Penambah (*Adder*)

Gambar 4.10 mengilustrasikan sistem (penambah) yang melakukan penambahan dua barisan sinyal untuk membentuk barisan lain (jumlah), yang kita tunjukkan sebagai y(n). Perhatikan bahwa ia tidak perlu menyimpan salah satu barisan untuk melakukan penambahan. Dengan kata lain, operasi penambahan adalah tanpa memori.



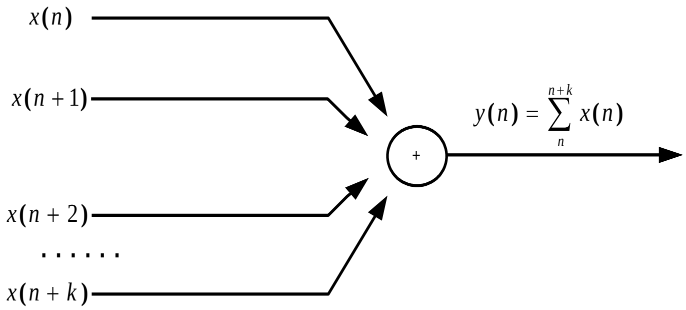
Gambar 4.10 Tampilan Grafis Penambah

2. Penjumlah

Fungsinya sama dengan penambah, tetapi dilakukan untuk penambahan banyak sinyal (lebih dari dua sinyal). Masukan *k* barisan sinyal menghasilkan:

$$y(n) = x(n) + x(n+1) + x(n+2) + ... + x(n+k)$$

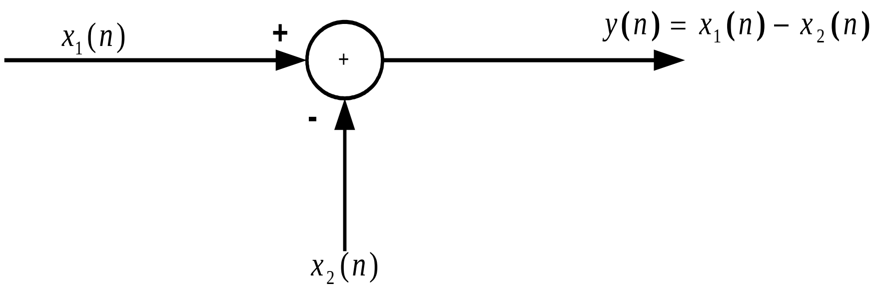
Diilustrasikan pada gambar 4.11.



Gambar 4.11 Tampilan Grafis Penjumlah

3. Pengurang (*Substractor*)

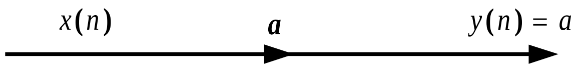
Pada prinsipnya, mengurang adalah menjumlah dengan lawannya. Diilustrasikan pada gambar 4.12.



Gambar 4.12 Tampilan Grafis Pengurang

4. Pengali Konstan

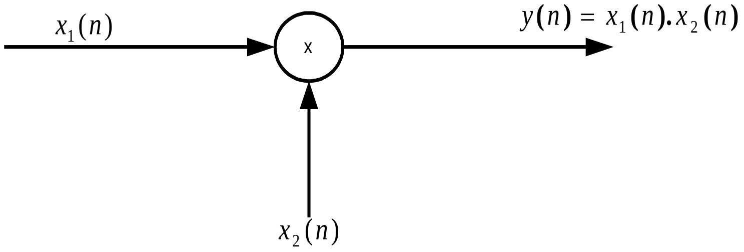
Operasi ini diperlihatkan dengan gambar 4.13, dan menggambarkan secara sederhana pemakaian faktor skala pada masukan x(n). Operasi ini juga tanpa memori.



Gambar 4.13 Tampilan Grafis Pengali Konstan

5. Pengali Sinyal

Gambar 4.14 mengilustrasikan perkalian dua barisan sinyal untuk membentuk barisan lain (perkalian), ditunjukkan pada gambar sebagai y(n). Seperti dalam dua kasus sebelumnya, kita dapat memandang operasi perkalian seperti tanpa memori.



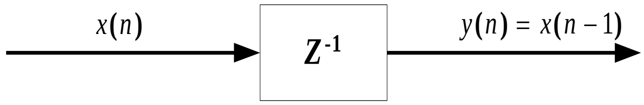
Gambar 4.14 Tampilan Grafis Pengali Sinyal

6. Elemen tunda unit (*unit delay*)

Tunda unit merupakan sistem khusus yang menunda secara sederhana sinyal yang melewatinya, dengan satu cuplikan. Gambar 4.15 mengilustrasikan sinyal sistem seperti itu. Jika sinyal masukan adalah x(n), keluarannya adalah x(n – 1). Faktanya, cuplikan x(n – 1) disimpan dalam memori pada waktu *n* untuk membentuk,

$$y(n) = x(n-1) \tag{4.14}$$

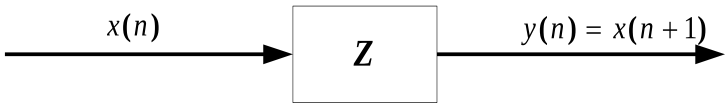
Jadi blok bangun dasar ini membutuhkan memori. Penggunaan simbol z^{-1} menunjukkan masukkan tunda yang akan jelas bila kita membicarakan transformasi-*z* dalam bab berikutnya.



Gambar 4.15 Tampilan Grafis Elemen Tunda Unit

7. Elemen Pemaju Unit

Kebalikan elemen tunda unit, pendahulu unit menggerakkan bagian depan masukan dengan satu cuplikan waktu untuk menghasilkan x(n+1). Gambar 4.16 mengilustrasikan operasi ini, dengan operator-*z* yang akan digunakan untuk menunjukkan pendahulu unit. Kita mengamati bahwa setiap pemaju seperti itu secara fisis tidak mungkin dalam waktu real, karena faktanya, ia terlibat ke dalam "masa depan" sinyal. Sebaliknya jika ia menyimpan sinyal dalam memori komputer, kita dapat memanggil kembali setiap cuplikan setiap waktu. Dalam aplikasi waktu-non-real seperti itu, terdapat kemungkinan memajukan sinyal x(n) dalam waktu.



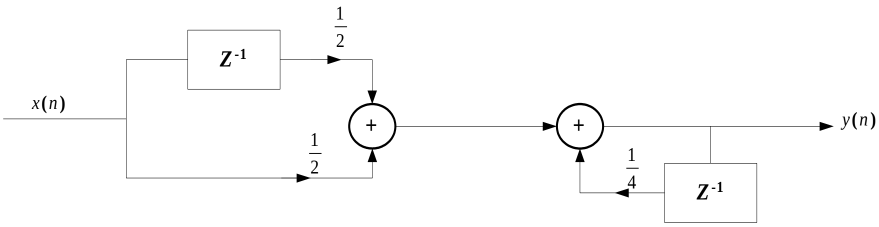
Gambar 4.16 Tampilan Grafis Elemen Pemaju Unit

Contoh 4.3 Dengan menggunakan blok dengan dasar yang diperkenalkan di atas, buatlah sketsa penyajian diagram blok sistem waktu-diskrit yang didiskripsikan dengan hubungan:

$$y(n) = \tfrac{1}{4}y(n-1) + \tfrac{1}{2}x(n) + \tfrac{1}{2}x(n-1)$$

Dengan x(n) adalah masukan dan y(n) adalah keluaran dari sistem.

Penyelesaian Contoh 4.3: Keluaran y(n) diperoleh dengan mengalikan masukan x(n – 1) dan x(n) dengan $1/2$, menambahkan kedua hasil tersebut, dan kemudian menambahkan keluaran $y(n-1)$ sebelumnya yang dikalikan dengan $1/4$. Gambar 4.17 mengilustrasikan realisasi diagram blok sistem ini.



Gambar 4.17 Diagram Blok Realisasi Sistem Contoh 4.3

4.6. Klasifikasi Sistem Waktu Diskrit

Banyak macam sistem waktu-diskrit yang sudah diklasifikasikan. Di sini kita hanya membahas empat macam klasifikasi, yaitu, sistem invarian-waktu, varian-waktu, linear dan non-linear.

1. Sistem Invarian-Waktu dan Varian-Waktu

Sistem dinamakan invarian-waktu jika karakteristik masukan-keluaran tidak berubah menurut waktu.

Misalkan sinyal masukan x(n), pada sistem T, menghasilkan sinyal keluaran y(n),

$$x(n) \xrightarrow{\text{T}} y(n) \qquad (4.15)$$

Sekarang anggap bahwa sinyal masukan yang sama ditunda dengan *k* satuan waktu untuk menghasilkan x(n – k) pada sistem yang sama, maka keluaran akan menjadi y(n – k),

$$x(n-k) \xrightarrow{\text{T}} y(n-k) \qquad (4.16)$$

Sebaliknya jika keluaran tidak sama dengan y(n − k), sistem dikatakan varian waktu. Secara umum, keluaran sistem T, dengan masukan x(n) ditulis sebagai,

$$y(n) = T[x(n)] \tag{4.17}$$

untuk setiap pergeseran waktu *k* ditulis sebagai:

$$y(n,k)=T\left[x\left(n-k\right)\right]$$

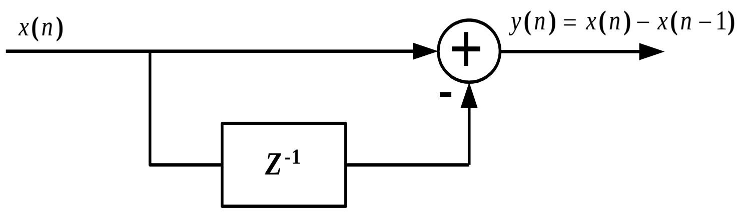
jika sistem adalah invarian-waktu, maka

$$y(n,k) = y(n-k) \tag{4.18}$$

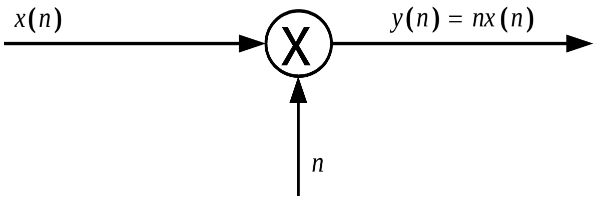
jika sistem adalah varian-waktu, maka

$$y(n,k) \neq y(n-k) \tag{4.19}$$

Contoh 4.4 Tentukan jika sistem-sistem yang diperlihatkan pada gambar 4.18 adalah invarian-waktu atau varian-waktu.



(a)



(b)

Gambar 4.18 Gambar Blok Diagram Sistem Contoh 4.4

Penyelesaian Contoh 4.4:

a. y(n) = x(n) – x(n – 1)

Jika masukan ditunda *k* satuan, dapat dibuktikan pada gambar 4.18(a), masukan x(n – k) menghasilkan,

$$y(n,k) = x(n-k) - x(n-k-1) \tag{4.20}$$

Selanjutnya jika keluaran y(n) ditunda *k* satuan waktu, maka

$$y(n-k) = x(n-k) - x(n-k-1) \tag{4.21}$$

Persamaan (4.20) dan (4.21) identik dan memenuhi persamaan (4.18), maka sistem adalah invarian-waktu

b. y(n) = nx(n)

Jika masukan ditunda *k* satuan, dapat dibuktikan pada gambar 4.18 (b), masukan x(n – k) menghasilkan,

$$y(n,k) = nx(n-k) \tag{4.22}$$

Selanjutnya jika keluaran y(n) ditunda *k* satuan waktu, maka

$$y(n-k) = (n-k)x(n-k) \tag{4.23}$$

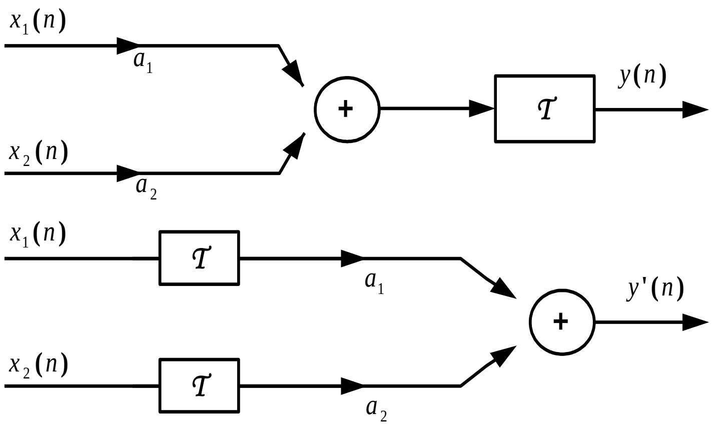
Persamaan (4.22) dan (4.23) tidak identik dan memenuhi persamaan (4.19), maka sistem adalah varian-waktu

2. Sistem Linear dan Non-Linear

Sistem linear adalah salah satu yang memenuhi prinsip superposisi. Kembali kita menggunakan istilah sistem T. Sistem adalah linear jika dan hanya jika,

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n) = a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)] \tag{4.24}$$

Diilustrasikan pada gambar 4.19.



Gambar 4.19 Tampilan Grafis Prinsip Superposisi. T Linear Jika dan Hanya Jika y(n) =y'(n)

Contoh 4.5 Tentukan jika dua sistem berikut linear atau non-linear

a. $y(n) = nx(n)$
b. $y(n) = x^2(n)$

Penyelesaian Contoh 4.5:

a. Untuk dua deret masukan $x_1(n)$ dan $x_2(n)$, keluaran yang sesuai adalah,

$$y_1(n) = nx_1(n)$$
$$y_2(n) = nx_2(n)$$

Kombinasi linear dari kedua deret masukan menghasilkan keluaran,

$$y_3(n) = T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]$$
$$y_3(n) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n) \tag{4.25}$$

Kombinasi linear dari kedua keluaran adalah,

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n) \tag{4.26}$$

Persamaan (4.25) dan (4.26) identik, maka sistem adalah linear.

b. Untuk dua deret masukan $x_1(n)$ dan $x_2(n)$, keluaran yang sesuai adalah,

$$\mathbf{y_1(n) = x_1^2(n) \text{ dan } y_2(n) = x_2^2(n)}$$

Kombinasi linear dari kedua deret masukan menghasilkan keluaran,

$$y_3(n) = T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]^2$$
$$y_3(n) = a_1^2x_1^2(n) + a_2^2x_2^2(n) + 2a_1a_2x_1(n)x_2(n) \tag{4.27}$$

Kombinasi linear dari kedua keluaran adalah,

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1x_1^2(n) + a_2x_2^2(n) \tag{4.28}$$

Persamaan (4.27) dan (4.28) tidak identik, maka sistem adalah non-linear

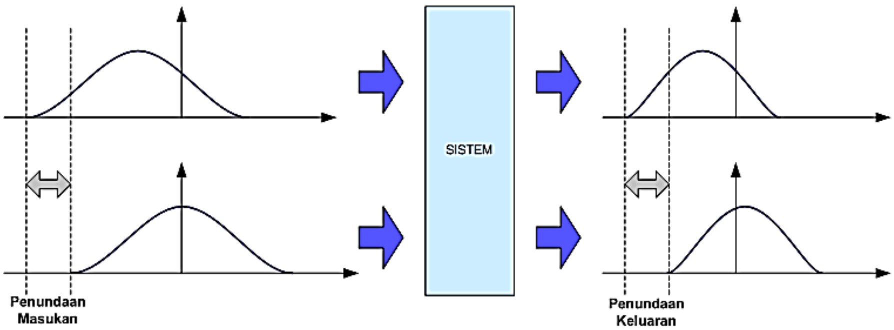
4.7. Sistem Linear Time-Invariant (LTI)

Kombinasi antara sistem varian-waktu/invarian-waktu dan sistem linear/non-linear akan menghasilkan klasifikasi sistem yang baru yaitu sistem LTI (*Linear Time-Invariant*).

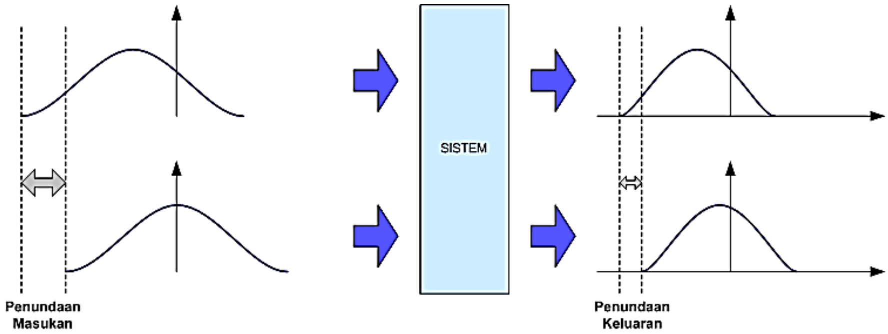
Sistem dikatakan LTI jika memenuhi persyaratan bahwa sinyal adalah linear dan invarian-waktu seperti yang dibahas pada sub bab 4.6 sebelum ini.

Informasi mengenai sebuah sistem adalah LTI atau bukan LTI adalah penting karena akan menentukan proses selanjutnya dari sebuah sistem. Sistem LTI lebih mudah diproses dan dianalisis dari pada sistem bukan LTI.

Pada kenyataannya sebagian besar sistem adalah bukan LTI. Karena itu sistem harus dibatasi pada daerah kerja yang kita perlukan sehingga menghasilkan respon yang sesuai dengan yang kita harapkan. Bab selanjutnya pada buku ini hanya akan membahas sistem LTI.



Gambar 4.20 Contoh Ilustrasi Sistem Invarian-Waktu

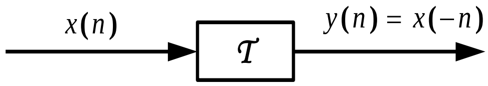


Gambar 4.21 Contoh Ilustrasi Sistem Varian-Waktu

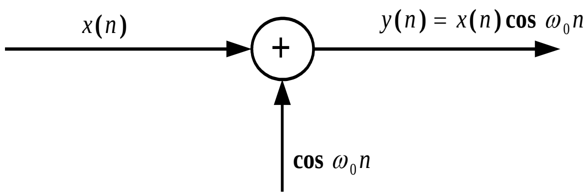
4.8. Soal-soal Latihan Bab IV

1. Tentukan dua sistem yang diperlihatkan pada gambar berikut, adalah invarian-waktu atau varian-waktu.

   a.



   b.



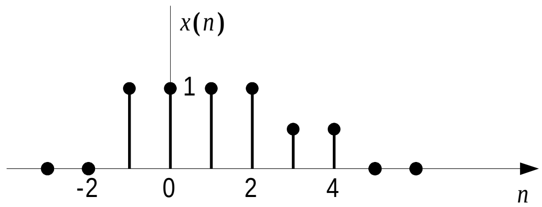
Gambar 4.19 Blok Digram Sistem Soal Latihan No.1

2. Tentukan apakah sistem berikut linear atau non-linear
   a. $y(n) = x(n^2)$
   b. $y(n) = Ax(n) + B$
   c. $y(n) = e^{x(n)}$
3. Suatu sinyal waktu-diskrit x(n) didefinisikan sebagai

$$x(n) = \begin{cases} 1 + \frac{n}{3}, & -3 \le n \le -1 \\ 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

a. Tentukan nilai-nilainya dan buatlah sketsa sinyal x(n)
b. Buat sketsa sinyal yang dihasilkan jika kita:
   - Pertama-tama melihat x(n) dan kemudian menunda sinyal yang dihasilkan dengan empat cuplikan
   - Pertama-tama menunda x(n) dengan empat cuplikan dan kemudian mencerminkan sinyal yang dihasilkan
c. Buat sketsa sinyal x(-n + 4)
d. Bandingkan hasil dalam bagian c dan b dan dapatkan suatu aturan untuk memperoleh sinyal x(-n+k) dari x(n)
e. Dapatkah kamu menyatakan sinyal x(n) dari segi sinyal δ(n) dan u(n)

4. Suatu sinyal waktu-diskrit x(n) yang diperlihatkan pada gambar berikut,



Buatlah sketsa dan labelkan dengan hati-hati masing-masing sinyal berikut:

a. x(n – 2)	e. x(n – 1) δ(n – 3)
b. x(4 – n)	f. $x(n^2)$
c. x(n + 2)	g. bagian genap x(n)
d. x(n)u(2 – n)	h. bagian ganjil x(n)

5. Perhatikanlah sistem

   $y(n) = T[x(n) = x(n^2)$

a. Tentukan apakah sistem itu invarian-waktu
b. Untuk menjelaskan hasil dalam bagian a., asumsikan bahwa sinyal dipakai ke dalam sistem

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

- Buat sketsa sinyal x(n)
- Tentukan dan buat sketsa sinyal y(n) = T[x(n)]
- Buat sketsa sinyal y_2' = y(n – 2)
- Tentukan dan buat sketsa sinyal x_2(n) dan x(n – 2)
- Tentukan dan buat sketsa sinyal y_2(n) dan T[x_2(n)]
- Bandingkan sinyal y_2(n) dan y(n – 2). Apa yang bisa kita simpulkan?

Ulangi bagian b untuk sistem y(n) = x(n) – x(n – 1)

BAB V

KONVOLUSI

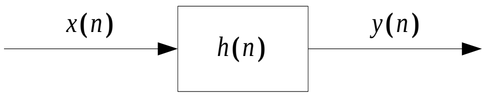
5.1. Tujuan Pembelajaran

Pada akhir perkuliahan ini mahasiswa akan dapat:

1. Menjelaskan tentang apa dan bagaimana sistem konvolusi itu.
2. Menjelaskan tentang fungsi penjumlahan konvolusi.
3. Menyebutkan dan menjelaskan langkah-langkah konvolusi.
4. Menjelaskan tentang sifat konvolusi pada sistem LTI.
5. Menjelaskan interkoneksi sistem LTI.

5.2. Konvolusi Sinyal Waktu-Diskrit

Konvolusi adalah satu cara matematis untuk mengombinasikan dua sinyal LTI untuk membentuk sinyal baru. Dengan menggunakan konvolusi kita akan memperoleh respons sistem berdasarkan masukan yang diterimanya.



Gambar 5.1 Konvolusi pada Sistem Linear

Sinyal masukan $x(n)$ masuk ke dalam sistem linear yang mempunyai tanggapan impuls $h(n)$ sehingga menghasilkan sinyal keluaran $y(n)$. Blok diagram sistem ditunjukkan pada gambar 5.1 dan dinyatakan dengan persamaan (5.1) sampai dengan (5.6) [John dan

Dimitri: 1995]. Untuk mempermudah, notasi tanda bintang (*) digunakan untuk menunjukkan operasi konvolusi.

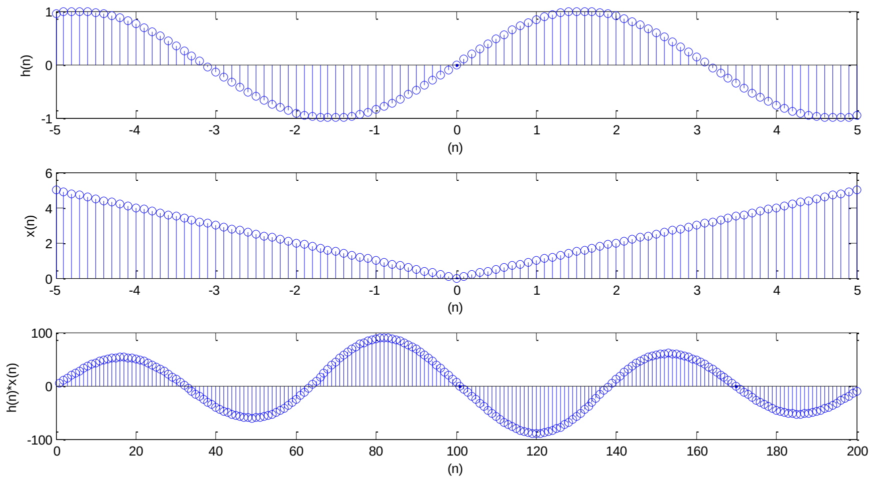
$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{5.1}$$

Pertama-tama, respons keluaran y(n,k) dari sistem terhadap barisan masukan sinyal cuplikan unit pada n = k kita definisikan sebagai h(n,k).

$$\mathrm{y(n,k)} \equiv \mathrm{h(n,k)} = \mathrm{T}\left[\delta\mathrm{(n\text{-}k)}\right] \tag{5.2}$$

Resolusi sinyal waktu diskrit menjadi impuls dinyatakan dalam persamaan,

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{5.3}$$



Gambar 5.2 Contoh Hasil Konvolusi Dua Sinyal Diskrit

Maka respons sistem terhadap x(n) adalah,

$$
\begin{aligned}
y(n) &= T[x(n)] = T[\textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)] \\
&= [\textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]] \\
&= [\textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)]
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Respons sistem LTI terhadap deret cuplikan unit $\delta(n)$ adalah h(n),

$$h(n) \equiv T\left[\delta(n)\right] \tag{5.5}$$

Jika sifat LTI adalah invarian-waktu, maka respons sistem terhadap tunda deret cuplikan unit $\delta(n-k)$ adalah,

$$h(n\text{-}k) \equiv T\left[\delta(n\text{-}k)\right] \tag{5.6}$$

Konsekuensinya, persamaan (5.4) menjadi,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{5.7}$$

Anggaplah bahwa kita ingin menghitung keluaran sistem pada waktu sesaat, $n = n_0$. Sesuai dengan persamaan (5.7), respons di $n = n_0$ adalah,

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0-k) \tag{5.8}$$

Analisa pengamatan:

- Pengamatan pertama kita adalah bahwa indeks penjumlahannya adalah *k*, dan karena itu sinyal masukannya adalah x(k) dan keluarannya adalah respon impuls $h(n_0 - k)$.
- Kedua, kita perhatikan bahwa deret x(k) dan $h(n_0 - k)$ dikalikan bersama untuk membentuk deret produk (hasil perkalian deret).

- Barisan $y(n_0)$ adalah penjumlahan sederhana melalui seluruh nilai deret produk $h(n_0 - k)$.
- $h(n_0 - k)$ diperoleh dari pencerminan h(k) yang digeser sejauh n_0 ke kanan/kiri jika n_0 positif/negatif.

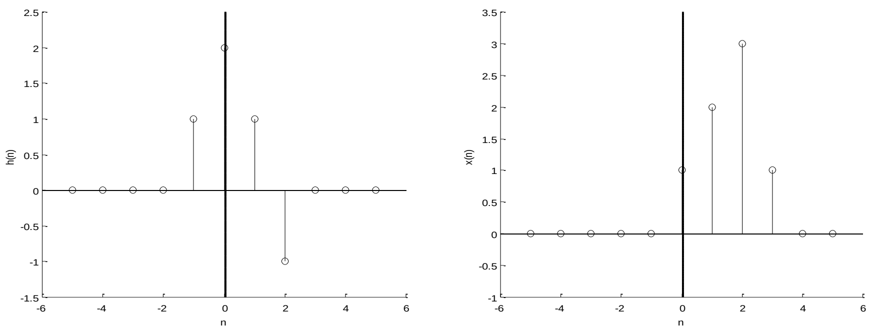
Secara ringkas proses penghitungan konvolusi antara x(k) dan h(k) melibatkan empat langkah:

1. **Pencerminan (*Folding*).** Cerminkan x(k) pada $k = 0$ untuk memperoleh h(-k).
2. **Pergeseran (*Shifting*).** Geser h(-k) sejauh n_0 ke kanan / kiri jika n_0 positif / negatif untuk memperoleh $h(n_0 - k)$.
3. **Perkalian (*Multiplication*).** Kalikan x(k) dengan $h(n_0 - k)$ untuk memperoleh deret produk,

$$v_{n_0}(k) \equiv x(k)h(n_0 - k) \tag{5.9}$$

4. **Penjumlahan (*Summation*).** Jumlahkan seluruh nilai deret produk $v_{n_0}(k)$ untuk memperoleh nilai keluaran pada waktu $n = n_0$.

Contoh 5.1 Respons impuls h(n) dari suatu sistem LTI seperti yang ditunjukkan gambar 5.3(a). Tentukan respons sistem terhadap terhadap sinyal masukan x(n) seperti yang ditunjukkan gambar 5.3(b).



(a) (b)

Gambar 5.3 (a) Respons impuls h(n) (b) Sinyal masukan x(n)

Penyelesaian Contoh 5.1:

Kita akan menghitung konvolusi sesuai dengan rumus (5.9), tetapi kita juga akan membuat grafik deretnya. Gambar 5.4(a) dan 5.4(b) mengilustrasikan respons impuls dan sinyal masukan x(k) dari sistem. Indeks *k* digunakan agar sesuai dengan persamaan (5.9)

Langkah pertama dalam komputasi jumlah konvolusi adalah mencerminkan h(k). Deret pencerminan h(k) diilustrasikan pada gambar 5.4(c). Sekarang kita dapat menghitung keluaran di *n* = 0, sesuai dengan persamaan (5.7) dan (5.8), ditunjukkan pada gambar 5.4(d).

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(-k)$$

Dari persamaan (5.9), maka deret produk,

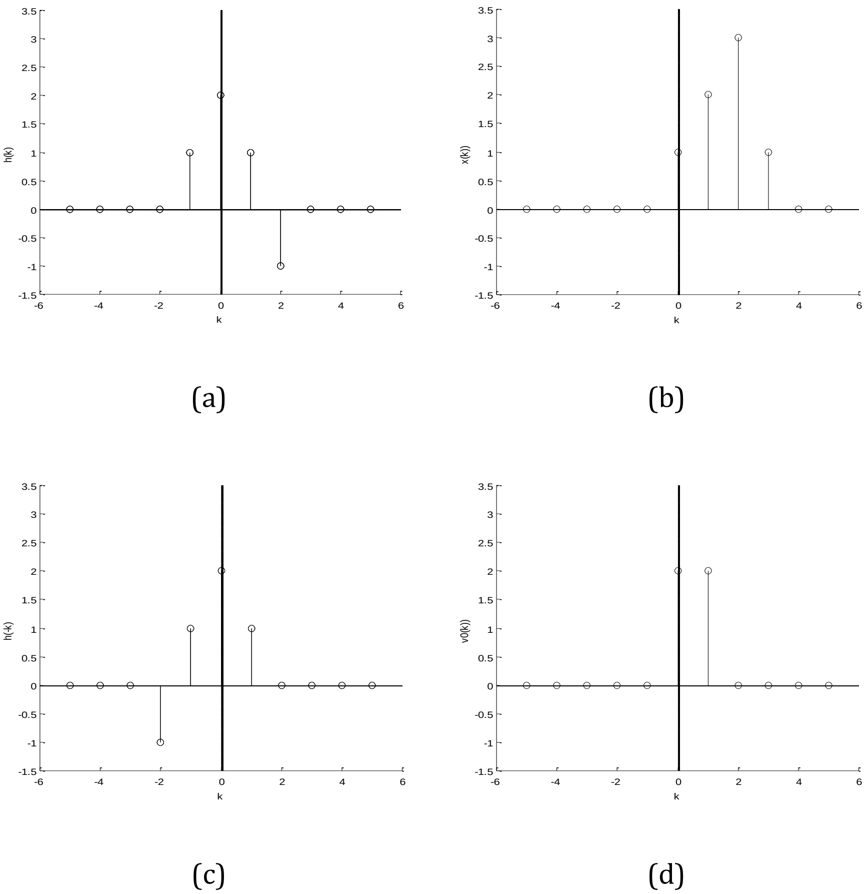
$$v_0(k) \equiv x(k)h(-k)$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0 k = 4$$

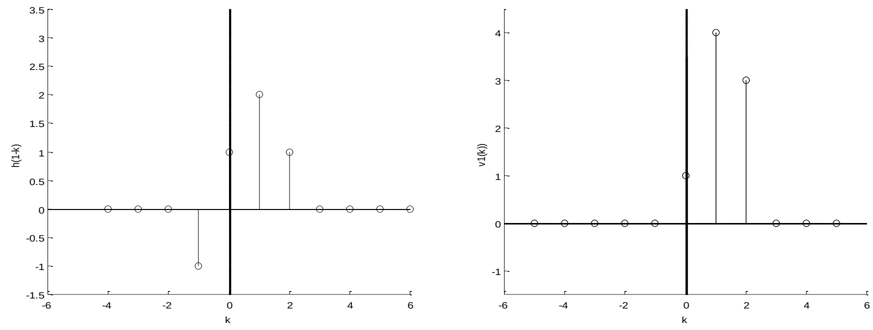
Kita lanjutkan komputasi dengan mengevaluasi respons sistem di *n* = 1.

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)h(1-k)$$

Deret h(1 – k) adalah pencerminan deret h(-k) (gambar 5.4(c)) yang digeser ke kanan menurut satu satuan waktu. Deret ini ditampilkan pada gambar 5.5(a). Deret produk, $v_1(k) \equiv x(k)h(1-k)$, diilustrasikan pada gambar 5.5(b). Akhirnya, jumlah seluruh nilai dalam produk menghasilkan, $y(1) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1 k = 8$.



Gambar 5.4 Perhitungan Grafis Konvolusi Contoh 5.1
(a) respons impuls h(k); (b) sinyal masukan x(k); (c) respons impuls h(-k) (d) v_0k sehingga $y(0) = 4$

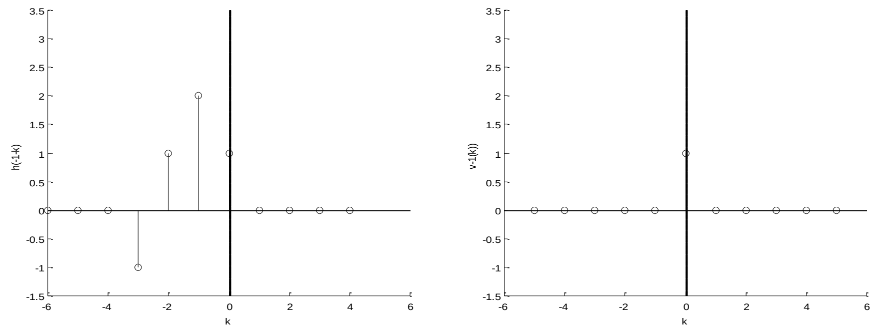


(a) (b)

Gambar 5.5 Perhitungan Grafis Konvolusi Contoh 5.1

(a) respons impuls h(1 – k); (b) v_1k sehingga $y(1) = 8$

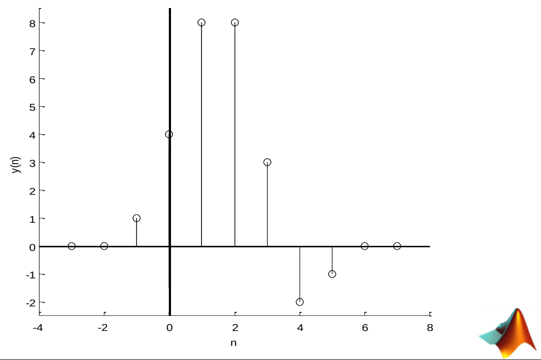
Dengan cara yang sama, kita memperoleh y(2) dengan menggeser h(-k) dua satuan ke kanan yang membentuk deret produk $v_2(k) \equiv x(k)h(2 - k)$. Akhirnya, kita memperoleh y(3) = 3; y(4) = -2; y(5) = -1, dst. Untuk $n > 5$, y(n) = 0, karena deret produk seluruhnya berisi nol.



(a) (b)

Gambar 5.6 Perhitungan Grafis Konvolusi Contoh 5.1

(a) respons impuls h(-1-k); (b) $v_{-1}k$ sehingga $y(-1) = 1$



Gambar 5.7 Hasil Komputasi Grafis Konvolusi Contoh 5.1

Berikutnya untuk n < 0, kita evaluasi dengan cara yang sama. Akhirnya kita mempunyai respons sistem seluruhnya untuk $-\infty < n < \infty$, yaitu,

$$y(n) = \{\ldots, 0, 0, 1, \underset{\uparrow}{4}, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, \ldots\} \tag{5.10}$$

Secara grafis, ditunjukkan pada gambar 5.7.

Selain perhitungan secara grafis, cara lain yang dapat digunakan untuk menghitung konvolusi adalah dengan menggunakan tabel matriks. Perhitungan konvolusi x(n)*h(n) dilakukan dengan menempatkan setiap nilai $h(n)$ di kolom paling kiri dan setiap nilai $x(n)$ pada baris paling atas, pada setiap nilai n yang bersesuaian. Nilai $y(n)$ didapat dengan menjumlahkan diagonal $h(n)x(n)$.

Tabel 5.1 Tabel Matriks Operasi Konvolusi

$h(n)/x(n)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	...
$h(0)$	$h(0)\,x(0)$	$h(0)\,x(1)$	$h(0)\,x(2)$	...
$h(1)$	$h(1)\,x(0)$	$h(1)\,x(1)$	$h(1)\,x(2)$	...
$h(2)$	$h(2)\,x(0)$	$h(2\,x(1)$	$h(2)\,x(2)$	...
$h(3)$	$h(3)\,x(0)$	$h(3)\,x(1)$	$h(3)\,x(2)$	
...	...	...	...	...

Tabel 5.2 Tabel Perhitungan Matriks Konvolusi

n	$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$
0	$y(0) = h(0)x(0)$
1	$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0)$
2	$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0)$
3	$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0)$
...	...

Matriks konvolusi dapat mempercepat proses perhitungan algoritma, terutama jika perhitungan dilakukan manual, tidak menggunakan bantuan pemrograman. Akan tetapi, permasalahan akan muncul apabila sinyal tidak dimulai dari n = 0. Seperti pada contoh 5.1, dimana respon impuls $h(n)$ dimulai pada n = -1. Matriks konvolusi tetap bisa digunakan, hanya saja kita harus lebih teliti untuk menentukan nilai n untuk $y(n)$. Terlebih dahulu kita periksa beberapa hasil dengan perhitungan biasa sesuai persamaan 5.8 dan 5.9, misal pada n = 0, untuk menghitung $y(0)$.

Pada contoh 5.1, tabel matriks yang didapat ditunjukkan pada tabel 5.3. Perhatikan bahwa hasil perhitungan jumlah diagonal adalah y(n) = {0,1,4,8,8,3,-2,-1,0}, bersesuaian dengan hasil yang ditunjukkan pada gambar 5.7. Akan tetapi hasil tersebut belum menunjukkan setiap nilai adalah untuk n yang mana. Kita bisa menghitung terlebih dahulu hasil konvolusi pada n = 0 yaitu $y(0)$ = 4, sehingga selanjutnya kita bisa menetapkan bahwa, $y(-2)$= 0, $y(-1)$= 1, $y(0)$ = 4, $y(1)$= 8, dan seterusnya.

Tabel 5.3 Tabel Matriks Operasi Konvolusi Contoh 5.1

$h(n)/x(n)$	0	1	2	3	1
1	0	1	2	3	1
2	0	2	4	6	2
1	0	1	2	3	1
-1	0	-1	-2	-3	-1
0	0	0	0	0	0

5.3. Sifat Konvolusi dan Interkoneksi Sistem LTI

1. Sifat Komutatif

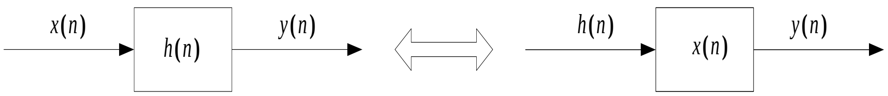
Sifat komutatif konvolusi dinyatakan dalam persamaan (5.11).

$$\boxed{x(n) * h(n) = h(n) * x(n)} \tag{5.11}$$

Sehingga,

$$y(n) = x(n) * h(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{5.12}$$

$$y(n) = h(n) * x(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{5.13}$$



Gambar 5.8 Interpretasi Sifat Komutatif Konvolusi

2. Sifat Asosiatif

Sifat asosiatif konvolusi dinyatakan dalam persamaan (5.14).

$$\boxed{[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]} \tag{5.14}$$

Dari titik pandang fisis, kita dapat menginterpretasikan x(n) sebagai sinyal masukan terhadap sistem LTI dengan respons impuls $h_1(n)$. Keluaran sistem ini, ditunjukkan sebagai $y_1(n)$, menjadi masukan terhadap sistem LTI kedua dengan respons impuls $h_2(n)$. Maka keluarannya adalah,

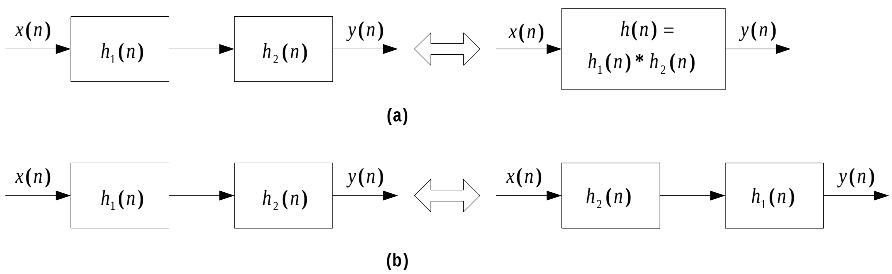
$$y(n) = y_1(n) * h_2(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \tag{5.15}$$

Yang presisi dengan ruas kiri persamaan (5.14) dan sesuai dengan dua sistem LTI dalam hubungan kaskade (seri). Sekarang ruas kanan persamaan (5.14) menunjukkan bahwa masukan x(n) dipakai terhadap suatu sistem ekivalen yang mempunyai respons impuls misalnya h(n), yang sama dengan konvolusi dari kedua respons impuls. Yakni,

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \tag{5.16}$$

$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{5.17}$$

Selanjutnya, karena operasi konvolusi memenuhi sifat komutatif, salah satu dapat mempertukarkan tingkat kedua sistem dengan respons $h_1(n)$ dan $h_2(n)$ tanpa mengubah hubungan masukan keluaran secara keseluruhan. Gambar 5.9 mengilustrasikan secara grafik sifat asosiatif.



Gambar 5.9 Implikasi Asosiatif (a) Asosiatif dan Komutatif (b) Sifat-Sifat Konvolusi

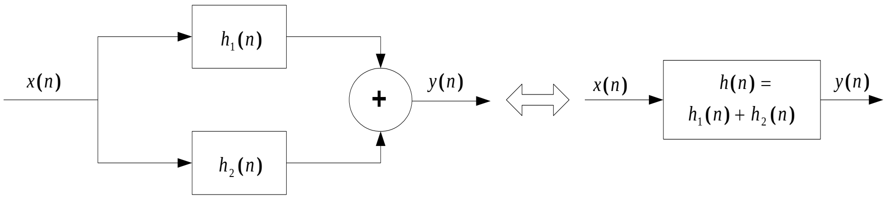
3. Sifat Distributif

Sifat distributif konvolusi dinyatakan dalam persamaan (5.18).

$$\boxed{x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)} \tag{5.18}$$

Sifat ini menyatakan bahwa jika kita mempunyai dua sistem LTI dengan respons impuls $h_1(n)$ dan $h_2(n)$ yang dieksitasi dengan sinyal masukan x(n) yang sama, jumlah kedua respon identik dengan respons suatu sistem menyeluruh dengan respons impuls.

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) \tag{5.19}$$



Gambar 5.10 Interpretasi Sifat Konvolusi Distribusi. Dua Sistem LTI Dihubungkan Secara Paralel dengan Sistem Tunggal dengan $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$

Jadi sistem menyeluruh dipandang sebagai kombinasi paralel dari dua sistem LTI seperti yang diilustrasikan gambar 5.10.

Contoh 5.2 Respons impuls h(n) dan sinyal masukan x(n) dari suatu sistem LTI seperti yang ditunjukkan gambar 5.3(a) pada contoh 5.1. Buktikan bahwa proses konvolusi memiliki sifat komutatif.

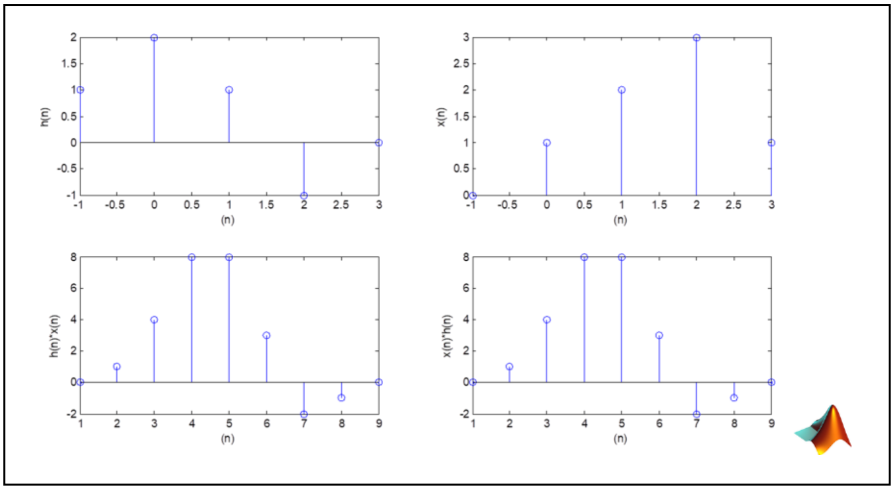
Penyelesaian contoh 5.2:

Tabel 5.3 sudah memberikan nilai perhitungan $h(n)*x(n)$. Selanjutnya kita buat tabel matriks yang sama untuk fungsi $x(n)*h(n)$.

Tabel 5.4 Tabel Matriks Operasi Konvolusi $x(n)*h(n)$ Contoh 5.2

$x(n)/h(n)$	1	2	1	-1	0
0	0	0	0	0	0
1	1	2	1	-1	0
2	2	4	2	-2	0
3	3	6	3	-3	0
1	1	2	1	-1	0

Himpunan penyelesaian hasil perhitungan tabel 5.4 adalah y(n) = {0,1,4,8,8,3,-2,-1,0}. Hasilnya sama dengan hasil perhitungan tabel 5.3, sehingga terbukti sifat komutatif fungsi konvolusi. Hasil perhitungan secara grafis ditunjukkan pada gambar 5.11.



Gambar 5.11 Hasil Konvolusi *x*(*n*)h*(*n*) dan *h*(*n*)**x*(*n*)**

5.4. Soal-Soal Latihan Bab V

1. Tentukan respons impuls untuk kaskade dari dua sistem LTI yang mempunyai respons

   $h_1(n) = \frac{1}{2}^{n} u(n)$ dan $H_2(n) = \frac{1}{4}^{n} u(n)$

2. Diketahui sinyal diskrit masukan $x(n)$ dan respon impulse $h(n)$ adalah sebagai berikut,

   $$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & yang\ lain \end{cases}$$

   $$h(n) = \begin{cases} 1, & -2 \le n \le 2 \\ 0, & yang\ lain \end{cases}$$

   Tentukan analisis hasil konvolusi $y(n)$ kedua sinyal tersebut secara:

   a. Grafis
   b. Matriks
   c. Program Matlab

d. Buktikan sifat komutatif, distributif dan asosiatif sistem konvolusi

3. Diketahui sinyal diskrit masukan $x(n)$ dan respon impulse $h(n)$ adalah sebagai berikut,

$$x(n) = \begin{cases} 0.8^n, & -3 \le n \le 5 \\ 0, & yang\,lain \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & yang\,lain \end{cases}$$

a. Buat sketsa grafik $x(n)$ dan $h(n)$

b. Buktikan sifat komutatif, distributif dan asosiatif konvolusi $x(n)$ dan $h(n)$

4. Hitunglah konvolusi y(n) = x(n) * h(n) pasangan sinyal-sinyal berikut

a. $x(n) = a^n u(n)$, $h(n) = b^n u(n)$ jika $a \neq b$ dan jika $a = b$

b.

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = -2, 0, 1 \\ 2, & n = -1 \\ 0, & \text{yanglain} \end{cases}$$

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$$

c. $x(n) = u(n + 1) - u(n - 4) - u(n - 5)$

$h(n) = u(n - 2) - u(n - 8) + u(n - 11) - u(n - 17)$

BAB VI

DERET FOURIER UNTUK SINYAL PERIODIK

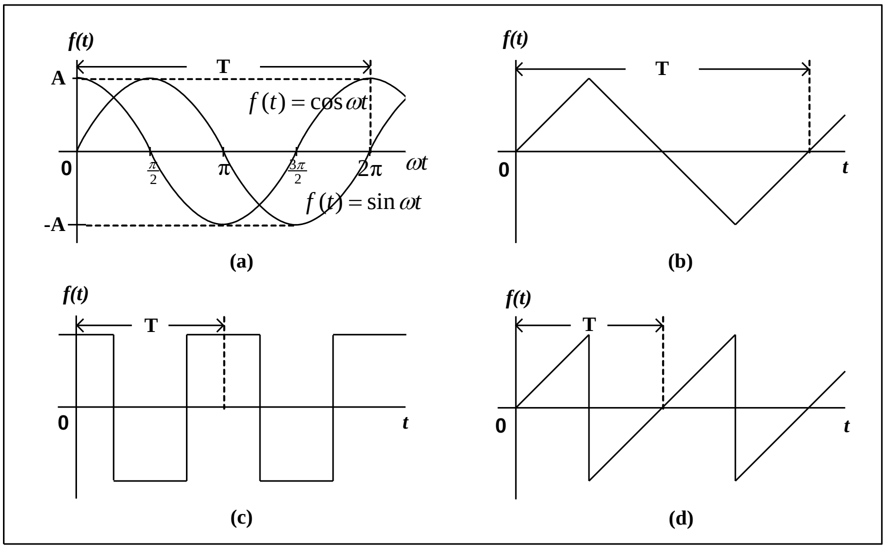
6.1. Tujuan Pembelajaran

Pada akhir perkuliahan ini mahasiswa akan dapat:

1. Memahami dan menjelaskan tentang gelombang berulang
2. Memahami dan menjelaskan Metode Fourier meliputi metode fungsi berulang dan metode bilangan kompleks
3. Menganalisa, memahami dan menjelaskan tentang bentuk-bentuk sinyal yang dihasilkan oleh Deret Fourier.

6.2. Gelombang–Gelombang Berulang Kompleks

Setiap bentuk gelombang yang lain daripada gelombang sinus atau kosinus, yang berulang kembali pada setiap selang waktu yang teratur (*regular interval*) dinamakan sebagai **gelombang berulang kompleks** (*complex repetitive wave*).



Gambar 6.1 Gelombang Fungsi Berulang
(a) sinusoida (b) segitiga (c) segiempat (d) gigi gergaji

Sinusoida merupakan salah satu fungsi matematika berulang yang paling sederhana. Sinyal sinusoida dengan frekuensi yang berubah-ubah adalah salah satu sinyal yang paling banyak digunakan dalam uji coba peralatan elektronika. Fungsi-fungsi berulang lainnya seperti gelombang segiempat, gelombang segitiga dan gelombang gigi gergaji, yang merupakan bentuk-bentuk gelombang penting dalam teknik elektro, tidak sesederhana fungsi sinusoida.

Spektrum untuk setiap gelombang berulang kompleks dapat diperoleh dengan suatu metode matematis yang dikenal sebagai metode Fourier.

6.3. Deret Fourier

Deret fourier dipakai sebagai perangkat untuk menghitung spektrum dari sinyal periodik. Untuk sinyal bukan periodik, perangkat yang digunakan adalah transformasi fourier.

6.3.1. Fungsi Berulang (Periodik)

Jika suatu fungsi $f(t)$ mempunyai bentuk gelombang (yaitu lengkungan $f(t)$ yang dilukis terhadap sumbu waktu t) sedemikian hingga

$$f(t) = f(t + T) \tag{6.1}$$

Maka fungsi itu dikatakan berulang dengan perioda T. (Frekuensi $\mathrm{f} = \frac{1}{\mathrm{T}}$ Hz). Ahli matematika Perancis **Jean Baptise Joseph Fourier** membuktikan bahwa setiap fungsi berulang sembarang dapat diwakili oleh suatu deret sinusoida tak hingga (Mismail, 1997: 181), yaitu:

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \ldots + b_1 \sin\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \ldots$$

Secara ringkas ditulis sebagai (Mismail, 1997: 181):

$$\boxed{f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\sim}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)} \tag{6.2}$$

dimana:

ω_0	=	$2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (frekuensi sudut dasar)
a_n & b_n	=	koefisien Fourier yang besarnya tergantung pada $f(t)$
a_0	=	ordinat rata-rata atau komponen searah $f(t)$
Suku $(a_1 \cos\omega_0 t + b_1 \sin\omega_0 t)$	=	komponen dasar yang mempunyai frekuensi dan perioda sama seperti gelombang aslinya.
Suku $(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$	=	komponen harmonisa ke-n pada fungsi $f(t)$

Persamaan (6.2) disebut sebagai **deret Fourier trigonometri** dari $f(t)$

Nilai koefisien a dan b dapat ditentukan dengan mengintegrasikan kedua ruas persamaan (6.2) sepanjang periodanya, yaitu:

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^T \tfrac{1}{2} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\sim} \left[\int_0^T (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt \right] \tag{6.3}$$

Kita selesaikan persamaan setiap suku dalam sigma (Σ) pada persamaan (6.3), yakni:

$$\begin{aligned}
\int_0^T (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)dt &= \int_0^T a_n \cos n\omega_0 t \, dt + \int_0^T b_n \sin n\omega_0 t \, dt \\
&= \frac{a_n}{n\omega_0}[\sin n\omega_0 t]_0^T - \frac{b_n}{n\omega_0}[\cos n\omega_0 t]_0^T \\
&= \frac{a_n}{n\omega_0}[\sin n\omega_0 T - \sin n\omega_0 0] - \frac{b_n}{n\omega_0}[\cos n\omega_0 T - \cos n\omega_0 0]
\end{aligned}$$

Karena, T = $2\pi/\omega_0$, maka

$$\begin{aligned}
\int_0^T (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)dt &= \frac{a_n}{n\omega_0}[\sin n2\pi - \sin 0] - \frac{b_n}{n\omega_0}[\cos n2\pi - \cos 0] \\
&= \frac{a_n}{n\omega_0}[0 - 0] - \frac{b_n}{n\omega_0}[1 - 1] \\
&= 0 \text{ (nol)}
\end{aligned}$$

Setiap suku dalam sigma (Σ) adalah 0 (nol), maka:

$$\sum_{n=1}^{\sim} \left[\int_0^T (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt \right] = 0$$

sehingga persamaan (6.3) diubah menjadi:

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^T \tfrac{1}{2} a_0 dt \tag{6.4}$$

Persamaan (6.4) diselesaikan, sedemikian hingga didapat persamaan untuk a_0:

$$2\int_0^T f(t)dt = \int_0^T a_0 dt = [a_0 t]_0^T = a_0[T-0] = a_0 T$$

Sehingga:

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt} \qquad (6.5)$$

Jika kedua ruas persamaan (6.3) dikalikan dengan $\cos m\omega_0 t$ dan m adalah bilangan bulat, maka:

$$\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 t\, dt = \cos m\omega_0 t\left[\int_0^T \tfrac{1}{2}a_0 dt + \sum_{n=1}^{\sim} a_n \int_0^T \cos n\omega_0 t\, dt + \sum_{n=1}^{\sim} b_n \int_0^T \sin n\omega_0 t\, dt\right] \qquad (6.6)$$

Jika diselesaikan analisa matematikanya untuk setiap integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{1}{2}a_0 \cos m\omega_0 t\, dt &= \frac{a_0}{2m\omega_0}[\sin m\omega_0 t]_0^T \\
&= \frac{a_0}{2m\omega_0}[\sin m2\pi - \sin 0] \\
&= \frac{a_0}{2m\omega_0}[0-0] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Untuk persamaan dalam sigma. Dengan mengingat rumus fungsi trigonometri:

cos A cos B = ½[cos (A + B) + cos (A – B)]
cos A sin B = ½[sin (A + B) – sin (A – B)]
sin A cos B = ½[sin (A + B) + sin (A – B)]
sin A sin B = -½[cos (A + B) – cos (A – B)]

Ada dua kemungkinan nilai m dan n, yaitu: $m \neq n$ dan $m = n$

$$\int_0^T \cos m\omega_0 t \sin n\omega_0 t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^T \sin(m+n)\,\omega_0 t - \sin(m-n)\,\omega_0 t dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{(m+n)\omega_0}\cos(m+n)\,\omega_0 t + \frac{1}{(m-n)\omega_0}\cos(m-n)\omega_0 t\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)2\pi - \cos 0}{(m+n)\omega_0} + \frac{\cos(m-n)2\pi - \cos 0}{(m-n)\omega_0}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1-1}{(m+n)\omega_0} + \frac{1-1}{(m-n)\omega_0}\right]$$

$$= 0 \text{ (nol)}$$

Untuk $m = n$

$$\int_0^T cos m\omega_0 t cos n\omega_0 t\ dt = \int_0^T cos n\omega_0 t cos n\omega_0 t\ dt$$

$$\int_0^T cos^2 n\omega_0 t\ dt = \int_0^T cos n\omega_0 t d(\sin n\omega_0 t)$$

$$= [\cos n\omega_0 t sin\ n\ \omega_0 t - \int \sin n\omega_0 t d(cos\ n\ \omega_0 t)]$$

$$= \left|\cos n\omega_0 t sin\ n\ \omega_0 t + \int \sin^2 n\omega_0 t dt\right|$$

$$= \left|\cos n\omega_0 t sin\ n\ \omega_0 t + \int (1 - cos^2 n\omega_0 t) dt\right|$$

$$= \left|\cos n\omega_0 t sin\ n\ \omega_0 t + \int dt - \int cos^2 n\omega_0 t\ dt\right|$$

$$2\int_0^T cos^2 n\omega_0 t\ dt = [cos n\omega_0 t \sin n\omega_0 t + t]_0^T$$

$$= [(cos n 2\pi sin 2\pi + T) - (cos 0 sin 0 + 0)]$$

$$= \mathrm{T}$$

Atau,

$$\int_0^T cos^2 n\omega_0 t\ dt = T/2$$

$$\int_0^T \cos m\omega_0 t sin\ n\omega_0 t\ dt = \int_0^T cos n\omega_0 t \sin n\omega_0\ t\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \sin(n+n)\omega_0 t - \sin(n-n)\ \omega_0 t\ dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^T \sin(n+n)\,\omega_0 t dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \sin 2n\,\omega_0 t dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2n\omega_0} cos2n\omega_0 t\right]_0^T \\
&= \frac{-1}{4n\omega_0}[cos4\pi n - cos0] \\
&= \frac{-1}{4n\omega_0}[1-1] \\
&= 0 \text{ (nol)}
\end{aligned}
$$

Setiap suku di ruas kanan pada persamaan (6.6) di atas adalah sama dengan nol. Kecuali untuk m = n, untuk persamaan $\int_0^T \cos m\omega_0 t cos\, n\omega_0 t\; dt$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \cos m\omega_0 t cos\, n\omega_0 t\; dt &= a_n \int_0^T cos^2 n\omega_0 t\; dt \\
&= a_n \frac{T}{2}
\end{aligned}
$$

Sehingga persamaan (6.6), untuk $m = n$, dapat ditulis sebagai:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 t\; dt &= a_n \int_0^T \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t\; dt \\
\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\; dt &= a_n \int_0^T \cos n\omega_0 t \cos n\omega_0 t\; dt = a_n \int_0^T \cos^2 n\omega_0 t\; dt \\
\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\; dt &= a_n \frac{T}{2}
\end{aligned}
$$

Maka:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\, dt} \qquad (6.7)$$

n = 1,2,3,...(bilangan bulat)

Jika kedua ruas persamaan (6.3) dikalikan dengan $\sin m\omega_0 t$ dan m adalah bilangan bulat, dengan cara yang sama:

$$\int_0^T f(t)\sin m\omega_0 t\, dt = \sin m\omega_0 t\left[\int_0^T \tfrac{1}{2} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\sim} a_n \int_0^T \cos n\omega_0 t\, dt + \sum_{n=1}^{\sim} b_n \int_0^T \sin n\omega_0 t\, dt\right] \qquad (6.8)$$

Jika diselesaikan analisa matematikanya untuk setiap integral:

$$\begin{aligned}\int_0^T \tfrac{1}{2} a_0 \sin m\omega_0 t\, dt &= \frac{-a_0}{2m\omega_0}\left[\cos m\omega_0 t\right]_0^T \\ &= \frac{-a_0}{2m\omega_0}\left[\cos m2\pi - \cos 0\right] \\ &= \frac{-a_0}{2m\omega_0}\left[1-1\right] \\ &= 0 \text{ (nol)}\end{aligned}$$

Untuk $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_0^T \sin m\omega_0 t \cos n\omega_0 t\, dt &= \tfrac{1}{2}\int_0^T \sin(m+n)\omega_0 t + \sin(m-n)\omega_0 t\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{(m+n)\omega_0}\cos(m+n)\omega_0 t - \frac{1}{(m-n)\omega_0}\cos(m-n)\omega_0 t\right]_0^T \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)2\pi - \cos 0}{(m+n)\omega_0} - \frac{\cos(m-n)2\pi - \cos 0}{(m-n)\omega_0}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1-1}{(m+n)\omega_0} - \frac{1-1}{(m-n)\omega_0}\right] \\ &= 0 \text{ (nol)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t\; dt &= -\tfrac{1}{2}\int_0^T \cos(m+n)\omega_0 t - \cos(m-n)\omega_0 t\; dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m+n)\omega_0}\sin(m+n)\omega_0 t - \frac{1}{(m-n)\omega_0}\sin(m-n)\omega_0 t\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)2\pi - \sin 0}{(m+n)\omega_0} - \frac{\sin(m-n)2\pi - \sin 0}{(m-n)\omega_0}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{0-0}{(m+n)\omega_0} - \frac{0-0}{(m-n)\omega_0}\right] \\
&= 0 \text{ (nol)}
\end{aligned}$$

Untuk $m = n$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin m\omega_0 t \cos n\omega_0 t\; dt &= \int_0^T \sin n\omega_0 t \cos n\omega_0 t\; dt \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^T \sin(n+n)\omega_0 t + \sin(n-n)\omega_0 t\; dt \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^T \sin(n+n)\omega_0 t\; dt = \tfrac{1}{2}\int_0^T \sin 2n\omega_0 t\; dt \\
&= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{-1}{2n\omega_0}\cos 2n\omega_0 t\right]_0^T = \tfrac{-1}{4n\omega_0}\left[\cos 4\pi n - \cos 0\right] \\
&= \tfrac{-1}{4n\omega_0}\left[1-1\right] \\
&= 0 \text{ (nol)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t\; dt &= \int_0^T \sin n\omega_0 t \sin n\omega_0 t\; dt \\
\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t\; dt &= -\int_0^T \sin n\omega_0 t\; d(\cos n\omega_0 t) \\
&= -\left[\sin n\omega_0 t \cos n\omega_0 t - \int \cos n\omega_0 t\; d(\sin n\omega_0 t)\right] \\
&= -\left[\sin n\omega_0 t \cos n\omega_0 t - \int \cos^2 n\omega_0 t\; dt\right] \\
&= \left[-\sin n\omega_0 t \cos n\omega_0 t + \int (1-\sin^2 n\omega_0 t)\; dt\right] \\
&= \left[-\sin n\omega_0 t \cos n\omega_0 t + \int dt - \int \sin^2 n\omega_0 t\; dt\right]
\end{aligned}$$

$$2\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t\, dt = \left[-\sin n\omega_0 t \cos n\omega_0 t + t\right]_0^T$$

$$= \left[(-\sin n2\pi \cos n2\pi + T) - (-\sin 0 \cos 0 + 0)\right]$$

$$= \mathrm{T}$$

Atau,

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t\, dt = \mathrm{T}/2$$

Setiap suku di ruas kanan pada persamaan (6.8) adalah sama dengan nol. Kecuali untuk m = n, untuk persamaan $\int_0^T \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t\, dt$:

$$b_n \int_0^T \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t\, dt = b_n \int_0^T sin^2 n\omega_0 t\, dt = b_n \frac{T}{2}$$

Sehingga persamaan (6.8), untuk m = n, dapat ditulis sebagai:

$$\int_0^T f(t) \sin m\omega_0 t\, dt = b_n \int_0^T \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t\, dt$$

$$= b_n \int_0^T \sin n\omega_0 t \sin n\omega_0 t\, dt$$

$$= b_n \int_0^T \sin^2 n\omega_0 t\, dt$$

$$\int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t\, dt = b_n \frac{T}{2}$$

Maka:

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t\, dt} \qquad (6.9)$$

n = 1,2,3,…(bilangan bulat)

Koefisien-koefisien Fourier dapat kita tulis kembali:

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt} \tag{6.10}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\; dt} \tag{6.11}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\; dt} \tag{6.12}$$

n = 1,2,3,...(bilangan bulat)

Adalah koefisien untuk deret Fourier trigonometri:

$$\boxed{f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\sim}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)} \tag{6.13}$$

Tampak persamaan (6.10) merupakan kasus khusus untuk persamaan (6.11), dimana n = 0. Karena alasan itu juga, maka suku konstantanya menggunakan $\frac{1}{2}a_0$ bukan a_0.

Dengan cara yang sama, dapat juga dibuktikan bahwa integrasi sepanjang setiap selang T memberikan hasil yang sama (misal: dari t_0 sampai dengan $t_0 + T$) yaitu:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt \tag{6.14}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t\; dt \qquad n = 1,2,3,... \tag{6.15}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t\; dt \qquad n = 1,2,3,... \tag{6.16}$$

6.3.2. Bentuk Kompleks

Berdasarkan Rumus Euler, dimana $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$, maka:

$$\frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} = \frac{(\cos n\omega_0 t + j\sin n\omega_0 t) + (\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t)}{2}$$

$$= \frac{2\cos n\omega_0 t}{2}$$

$$= \cos n\omega_0 t$$

$$\frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{j2} = \frac{(\cos n\omega_0 t + j\sin n\omega_0 t) - (\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t)}{j2}$$

$$= \frac{2j\sin n\omega_0 t}{j2}$$

$$= \sin n\omega_0 t$$

Sehingga:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \qquad (6.17)$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{j2} \qquad (6.18)$$

Persamaan (6.13) dapat ditulis kembali sebagai:

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{j2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} - jb_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2}\right)$$

→ ingat: $\frac{1}{j} = -j$

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n e^{jn\omega_0 t} + a_n e^{-jn\omega_0 t}}{2} + \frac{-jb_n e^{jn\omega_0 t} + jb_n e^{-jn\omega_0 t}}{2}\right)$$

$$f(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{jn\omega_0 t}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right) + e^{-jn\omega_0 t}\left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)\right) \qquad (6.19)$$

Misalkan: $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ dan $c_n^* = \frac{a_n + jb_n}{2}$

Maka:

$$c_n = \frac{\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t dt - j\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t dt}{2}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t dt - j\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t dt$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t)dt$$

$$c_n^* = \frac{\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t dt + j\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t dt}{2}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t dt + j\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(\cos n\omega_0 t + j\sin n\omega_0 t)dt$$

Sehingga:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t)dt$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt} \tag{6.20}$$

Dan

$$c_n^* = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(\cos n\omega_0 t + j\sin n\omega_0 t)dt$$

$$c_n^* = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{jn\omega_0 t}dt \tag{6.21}$$

Perhatikan bahwa: $c_n^* = c_{-n}$ (mengganti n pada c_n menjadi -n)

$$\boxed{c_{-n} \quad = \quad \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{jn\omega_0 t}dt} \tag{6.22}$$

Jika n = 0, maka:

$$c_0 \quad = \quad \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{j(0)\omega_0 t}dt$$

$$c_0 \quad = \quad \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{0}dt$$

$$c_0 \quad = \quad \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$$

Bandingkan dengan persamaan (6.14), tampak bahwa:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \tag{6.23}$$

Persamaan (6.19) dapat ditulis kembali sebagai:

$$f(t) \quad = \quad \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\sim}\left(e^{jn\omega_0 t}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right) + e^{-jn\omega_0 t}\left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)\right)$$

$$= \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\sim}\left(e^{jn\omega_0 t}c_n + e^{-jn\omega_0 t}c_{-n}\right)$$

$$f(t) \quad = \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\sim}e^{jn\omega_0 t}c_n + \sum_{n=1}^{\sim}e^{-jn\omega_0 t}c_{-n}$$

Untuk deret sigma ke-2, nilai minus (–) penjumlahan menurut bilangan bulat dari 1 ke ~ lebih praktis jika diadakan penjumlahan dari –1 ke -~, dan c_0 tidak ditulis lagi karena sudah termasuk pada suku $e^{jn\omega_0 t}c_n$ dalam batas sigma $0 \le n \le \sim$ untuk n = 0, sehingga:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\sim}e^{jn\omega_0 t}c_n + \sum_{n=-1}^{-\sim}e^{jn\omega_0 t}c_n$$

Atau secara ringkas:

$$\boxed{f(t) \;=\; \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{jn\omega_0 t} c_n} \tag{6.24}$$

Dengan c_n berdasarkan persamaan (6.20) adalah:

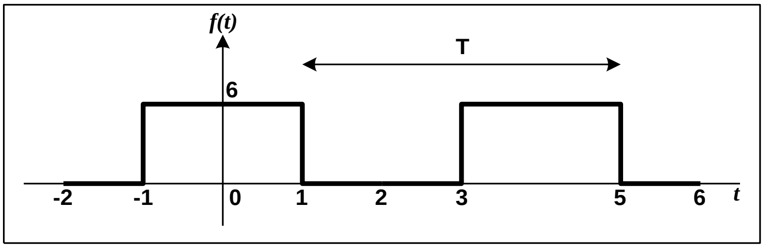
$$\boxed{c_n \;=\; \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt} \tag{6.25}$$

Persamaan (6.24) dikenal sebagai **bentuk kompleks dari gelombang berulang**.

6.4. Analisa Deret Fourier untuk Beberapa Gelombang Berulang

6.4.1. Analisa Deret Fourier untuk Pulsa Segi Empat

Misalkan suatu rangkaian menghasilkan bentuk pulsa seperti yang ditunjukkan dalam gambar 6.2.



Gambar 6.2 Gelombang Pulsa Segiempat

Dari gambar 6.2 bisa kita lihat bahwa:

$$f(t)=\begin{cases}0 & -2<t<-1\\ 6 & -1<t<1\\ 0 & 1<t<2\end{cases} \qquad \textbf{dan} \qquad f(t+4)=f(t)$$

T = 4, maka $\rightarrow$ $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

Berdasarkan persamaan (6.14), (6.15) dan (.16), maka:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$$

$$= \frac{2}{4}\int_{-1}^{1} 6\,dt=\frac{2\times 6}{4}\left[t\right]_{-1}^{1}=3[1-(-1)]=3\times 2=6$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2}{4}\int_{-1}^{1} 6\cos n\omega_0 t\,dt=3\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi}{2}t\,dt=\frac{3\times 2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}t\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{6}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{-n\pi}{2}\right]=\frac{6}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}-(-\sin\frac{n\pi}{2})\right]=\frac{6}{n\pi}\left[2\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2}{4}\int_{-1}^{1} 6\sin n\omega_0 t\,dt=3\int_{-1}^{1}\sin\frac{n\pi}{2}t\,dt=\frac{3\times 2}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi}{2}t\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{6}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{-n\pi}{2}\right]=\frac{6}{n\pi}\left[-0+0\right]=0$$

Maka, deret fourier trigonometri untuk gelombang pulsa segi empat gambar (6.2) adalah:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\sim}a_n\cos n\omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2}6+\sum_{n=1}^{\sim}\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos n\omega_0 t \qquad \rightarrow \omega_0 = \pi/2$$

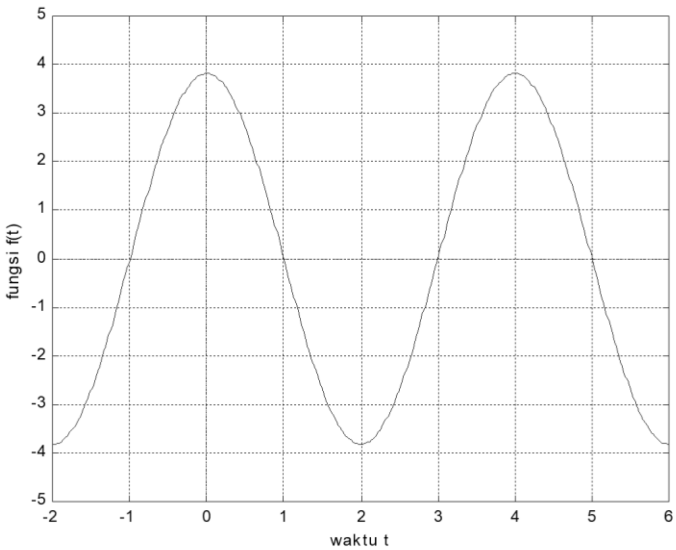
$$= \quad 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi t}{2} \qquad (6.26)$$

1. Grafik Komponen Gelombang Dasar Gelombang Segi Empat

Sesuai definisi sebelumnya bahwa **suku** $a_1 cos\omega_0 t + b_1 sin\omega_0 t$ **adalah: komponen dasar yang mempunyai frekuensi dan perioda sama seperti gelombang aslinya**. Di mana:

$$a_1 = \frac{12}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{12}{\pi} \quad dan \quad b_1 = 0$$

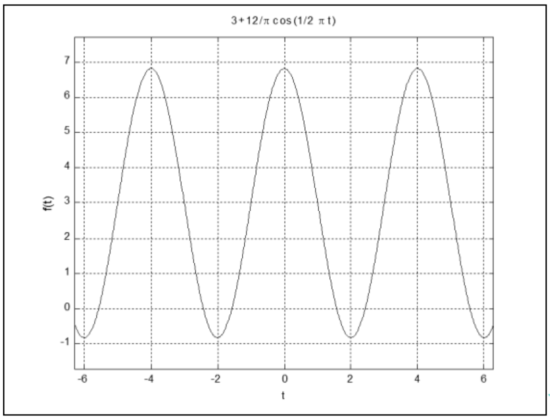
Sehingga komponen dasarnya adalah: $\frac{12}{\pi} cos \frac{\pi t}{2}$



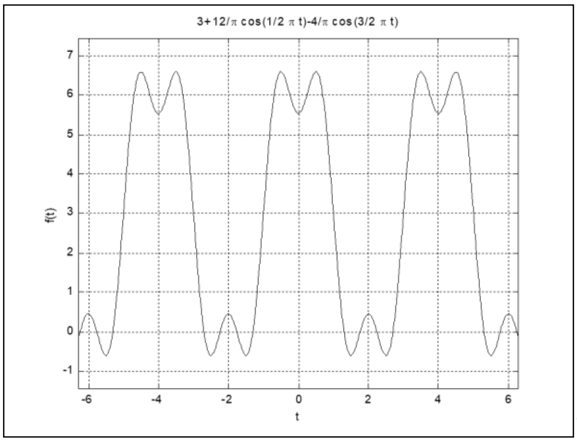
Gambar 6.3 Simulasi Komponen Gelombang Dasar untuk Gelombang Pulsa Segi Empat Gambar 6.2

2. Grafik untuk Gelombang Berulang

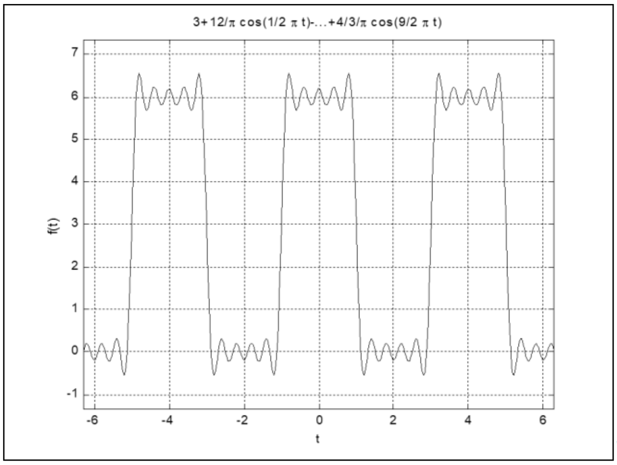
Persamaan (6.26) adalah persamaan gelombang berulang untuk gelombang pulsa segi empat gambar 6.2. Program dibuat untuk beberapa harmonisa sehingga pada gelombang tampak perubahan bertahap yang terjadi setiap harmonisa.



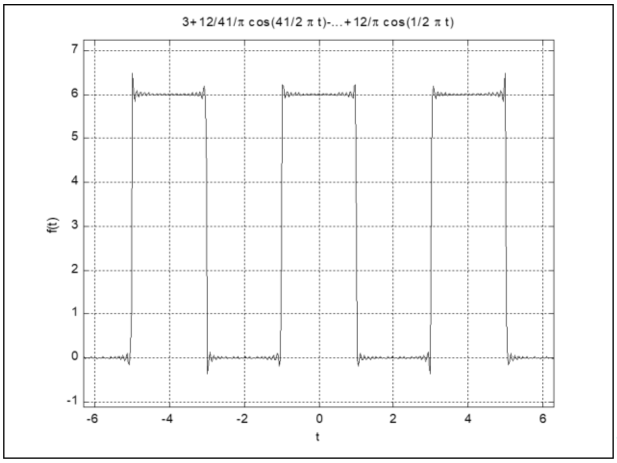
Gambar 6.4.a Simulasi Gelombang Berulang untuk Gelombang Pulsa Segi Empat Gambar 6.2 pada harmonisa ke-1



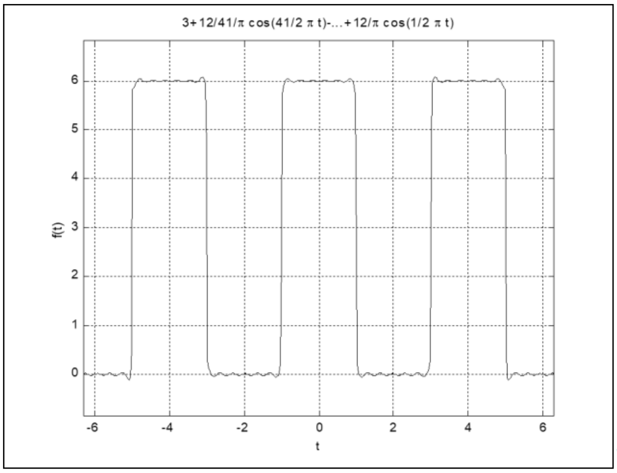
Gambar 6.4.b Simulasi Gelombang Berulang untuk Gelombang Pulsa Segi Empat Gambar 6.2 pada Harmonisa ke-3



Gambar 6.4.c Simulasi Gelombang Berulang untuk Gelombang Pulsa Segi Empat Gambar 6.2 pada Harmonisa ke-10



Gambar 6.4.d Simulasi Gelombang Berulang untuk Gelombang Pulsa Segi Empat Gambar 6.2 pada HARMONISA ke-100



Gambar 6.4.e Simulasi Gelombang Berulang untuk Gelombang Pulsa Segi Empat Gambar 6.2 pada Harmonisa ke-150

3. Bentuk Kompleks dari Gelombang Berulang Segi Empat

Berdasarkan persamaan (6.25):

$$c_n = \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$c_n = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 6e^{-jn\frac{\pi}{2}t}dt = \frac{6}{4}\left[\frac{-2}{jn\pi}e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\right]_{-1}^{1} = \frac{-3}{jn\pi}\left[e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-3}{jn\pi}\left[e^{-jn\frac{\pi}{2}} - e^{jn\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{-3}{jn\pi}\left[\left(\cos\frac{n\pi}{2} - j\sin\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\cos\frac{n\pi}{2} + j\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$c_n = \frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = 3\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}$$

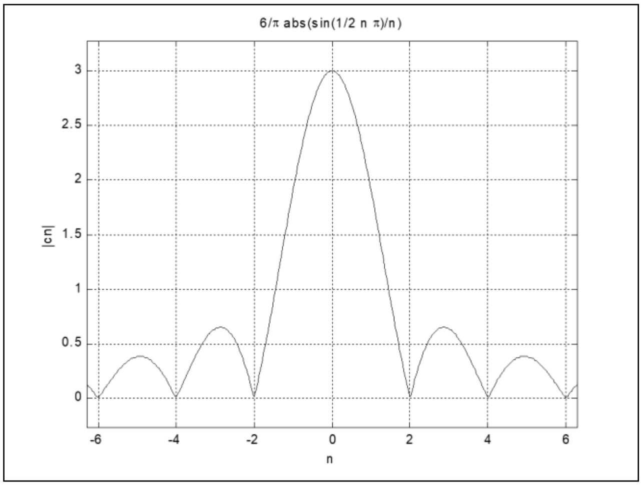
Berdasarkan persamaan 6.24), maka:

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{-jn\omega_0 t}c_n$$

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{-jn\frac{\pi}{2}t}\, 3\frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2} \tag{6.27}$$

Faktor trigonometris dalam persamaan (6.27) seringkali terdapat di dalam teori komunikasi modern, dan faktor ini dinamai fungsi cuplikan (*sampling function*). Magnitudo (besarnya) persamaan (6.27) adalah:

$$|c_n| = 3\left|\frac{\sin\frac{1}{2}n\pi}{\frac{1}{2}n\pi}\right| \tag{6.28}$$



Gambar 6.5 Magnitudo Kompleks Gelombang Pulsa Segi Empat Gambar 6.2

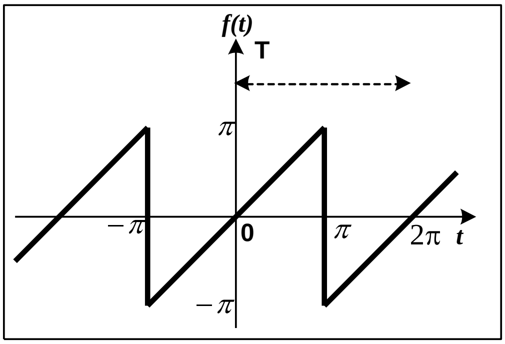
6.4.2. Analisa Deret Fourier untuk Gelombang Gigi Gergaji

Misalkan suatu rangkaian menghasilkan bentuk gelombang seperti yang ditunjukkan dalam gambar 6.6. Dari gambar tersebut bisa kita lihat bahwa:

$f(t) = t$ $\qquad -\pi < t < \pi$

$f(t + 2\pi) = f(t)$

T = 2π, maka → $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$



Gambar 6.6 Gelombang Gigi Gergaji

Berdasarkan persamaan (6.14), (6.15) dan (6.16), maka:

$a_0 \quad = \quad \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$

$\quad\quad = \quad \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}[\pi^2 - (-\pi)^2] = 0$

$a_n \quad = \quad \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$

$\quad\quad = \quad \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos n\omega_0 t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos nt\, dt = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, d(\sin nt)$

$\quad\quad = \quad \frac{1}{n\pi}\left[t\sin nt - \int \sin nt\, dt\right] = \frac{1}{n\pi}\left[t\sin nt + \frac{1}{n}\cos nt\right]$

$\quad\quad = \quad \left[\frac{1}{n\pi}t\sin nt + \frac{1}{n^2\pi}\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi}$

$\quad\quad = \quad \left[\left(\frac{1}{n}\sin n\pi + \frac{1}{n^2\pi}\cos n\pi\right) - \left(\frac{-1}{n}\sin(-n\pi) + \frac{1}{n^2\pi}\cos(-n\pi)\right)\right]$

$\quad\quad = \quad \left[\frac{1}{n}\sin n\pi + \frac{1}{n^2\pi}\cos n\pi - \frac{1}{n}\sin n\pi - \frac{1}{n^2\pi}\cos n\pi\right]$

$\quad\quad = \quad 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin n\omega_0 t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\, dt = \frac{-1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, d(\cos nt)\, dt$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[t\cos nt - \int \cos nt\, dt\right] = \frac{-1}{n\pi}\left[t\cos nt - \frac{1}{n}\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[\left(\pi\cos n\pi - \frac{1}{n}\sin n\pi\right) - \left(-\pi\cos(-n\pi) - \frac{1}{n}\sin(-n\pi)\right)\right]$$

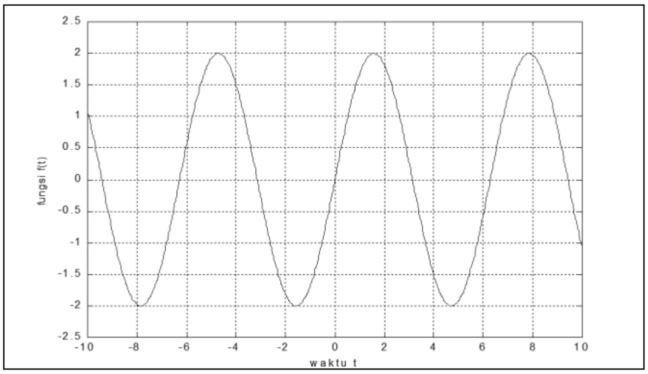
$$= \frac{-1}{n\pi}2\pi\cos n\pi = \frac{-2\cos n\pi}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Maka, deret fourier trigonometri untuk gelombang gigi gergaji gambar (6.6) adalah:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\sim} b_n \sin n\omega_0 t$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\sim} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin n\omega_0 t \qquad \rightarrow \omega_0 = 1$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\sim} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nt \tag{6.29}$$



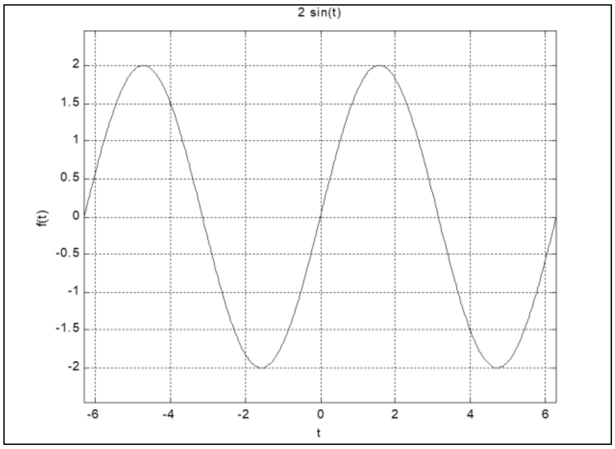
Gambar 6.7 Simulasi Komponen Gelombang Dasar untuk Gelombang Gigi Gergaji Gambar 6.6

1. **Grafik Komponen Gelombang Dasar Gigi Gergaji**

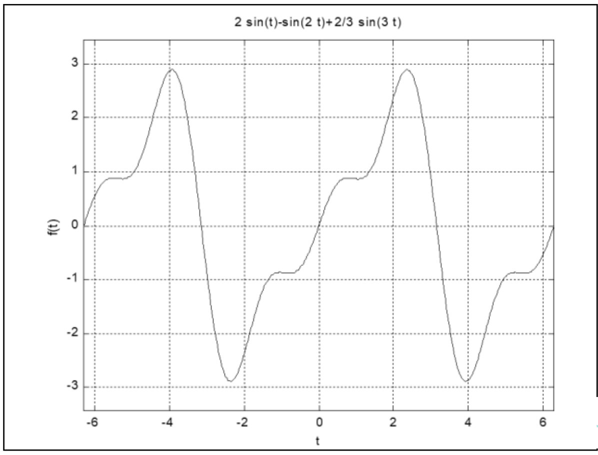
Komponen dasar dari gelombang gigi gergaji gambar 6.6 adalah: $f(t) = 2\sin t$

2. **Grafik untuk Gelombang Berulang Gigi Gergaji**

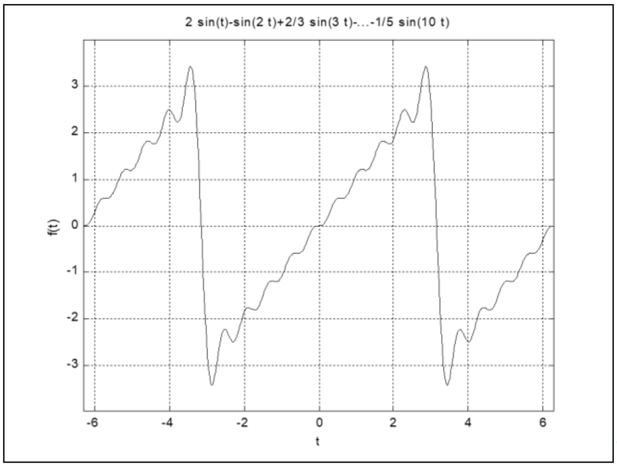
Persamaan (6.29) adalah persamaan gelombang berulang untuk gelombang gigi gergaji gambar 6.6.



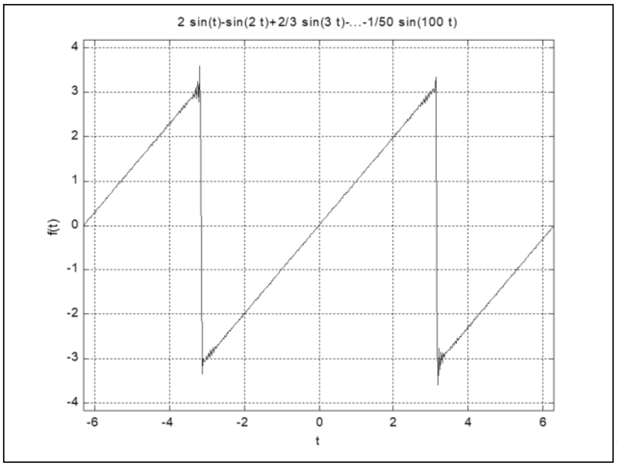
Gambar 6.8.a Simulasi Gelombang Berulang untuk Gelombang Gigi Gergaji Gambar 6.6 Harmonisa ke-1



Gambar 6.8.b Simulasi Gelombang Berulang untuk Gelombang Gigi Gergaji Gambar 6.6 Harmonisa ke-3



Gambar 6.8.c Simulasi Gelombang Berulang untuk Gelombang Gigi Gergaji Gambar 6.6 Harmonisa ke-10



Gambar 6.8.d Simulasi Gelombang Berulang untuk Gelombang Gigi Gergaji Gambar 6.6 Harmonisa ke-100

3. Bentuk Kompleks dari Gelombang Berulang Gigi Gergaji

Berdasarkan persamaan (6.25):

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-jnt}dt = \frac{-1}{2jn\pi}\int_{-\pi}^{\pi} td(e^{-jnt})$$

$$= \frac{-1}{2jn\pi}\left[te^{-jnt} - \int e^{-jnt}dt\right] = \frac{-1}{2jn\pi}\left[te^{-jnt} + \frac{1}{jn}e^{-jnt}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{2jn\pi}\left[\left(\pi e^{-jn\pi} + \frac{1}{jn}e^{-jn\pi}\right) - \left(-\pi e^{jn\pi} + \frac{1}{jn}e^{jn\pi}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{2jn\pi}\left[\pi e^{-jn\pi} + \frac{1}{jn}e^{-jn\pi} + \pi e^{jn\pi} - \frac{1}{jn}e^{jn\pi}\right]$$

$$= \frac{-1}{2jn\pi}\left[\pi(e^{-jn\pi} + e^{jn\pi}) - \frac{1}{jn}(e^{-jn\pi} - e^{jn\pi})\right]$$

$$= \frac{-1}{2jn\pi}\left[\pi(e^{jn\pi} + e^{-jn\pi}) + \frac{1}{jn}(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi})\right]$$

$$= \frac{-1}{2jn\pi}\left[\pi(2\cos n\pi) + \frac{1}{jn}(2j\sin n\pi)\right]$$

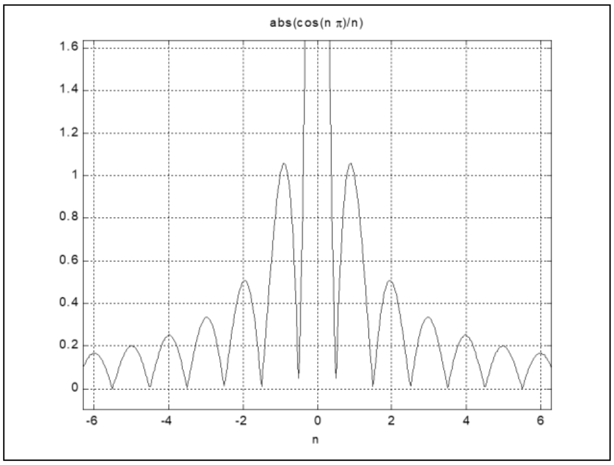
$$= \frac{-\cos n\pi}{jn} = \frac{j\cos n\pi}{n}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{-jn\omega_0 t} c_n$$

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} \frac{j\cos n\pi}{n} e^{-jn\frac{\pi}{2}t} \qquad (6.30)$$

Magnitudo (besarnya) persamaan (6.30) adalah:

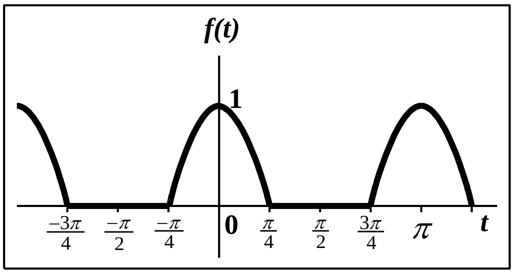
$$|c_n| = \left|\frac{\cos n\pi}{n}\right| \qquad (6.31)$$



Gambar 6.9 Magnitudo Kompleks Gelombang Gigi Gergaji Gambar 6.6

6.4.3. Analisa Deret Fourier untuk Gelombang Sinusoida Tersearahkan Setengah Gelombang (*Half-Wave Rectified*)

Misalkan suatu rangkaian menghasilkan bentuk gelombang seperti yang ditunjukkan dalam gambar 6.10 berikut:



Gambar 6.10 ***Half Wafe Rectified***

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\tfrac{3}{4}\pi \le t < -\tfrac{1}{4}\pi \\ \cos 2t & -\tfrac{1}{4}\pi \le t < \tfrac{1}{4}\pi \\ 0 & \tfrac{1}{4}\pi \le t < \tfrac{3}{4}\pi \end{cases}$$

$$f(t+\pi) = f(t)$$

T = π, maka → $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2t\, dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{\pi}[\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})]$$

$$= \frac{1}{\pi}[\sin\frac{\pi}{2} - (-\sin\frac{\pi}{2})] = \frac{1}{\pi}[1+1] = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2t \cos 2nt\, dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2t(1+n) + \cos 2t(1-n)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2(1+n)}\sin 2t(1+n) + \frac{1}{2(1-n)}\sin 2t(1-n)\right]_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(1+n)}{2(1+n)}+\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(1-n)}{2(1-n)}\right)-\left(\frac{-\sin\frac{1}{2}\pi(1+n)}{2(1+n)}-\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(1-n)}{2(1-n)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(1+n)}{(1+n)}+\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(1-n)}{(1-n)}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}\cos 2t\sin 2nt\, dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}\sin 2t(1+n)-\sin 2t(1-n)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{2(1+n)}\cos 2t(1+n)+\frac{1}{2(1-n)}\cos 2t(1-n)\right]_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{-\cos\frac{1}{2}\pi(1+n)}{2(1+n)}+\frac{\cos\frac{1}{2}\pi(1-n)}{2(1-n)}\right)-\left(\frac{-\cos\frac{1}{2}\pi(1+n)}{2(1+n)}+\frac{\cos\frac{1}{2}\pi(1-n)}{2(1-n)}\right)\right]$$

$$= 0$$

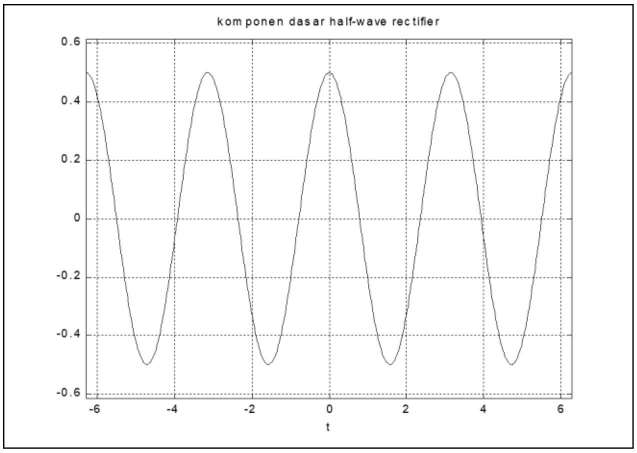
Maka, deret fourier trigonometri untuk *hal-wave rectifier* gambar (6.10) adalah:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\sim} a_n \cos n\omega_0 t \qquad \rightarrow \omega_0 = 2$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\sim}\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(1+n)}{(1+n)}+\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(1-n)}{(1-n)}\right)\cos 2nt \qquad (6.32)$$

1. **Grafik untuk Komponen Gelombang Dasar *Half-Wave Rectified***

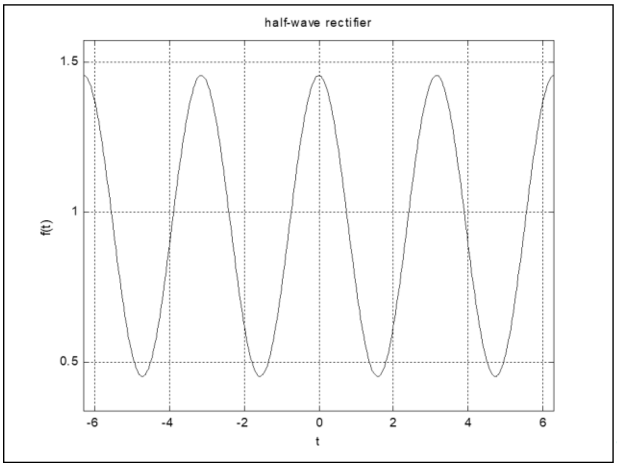
   Komponen dasar dari gelombang *half-wave rectifier* gambar 6.10 ditunjukkan pada gambar 6.11.



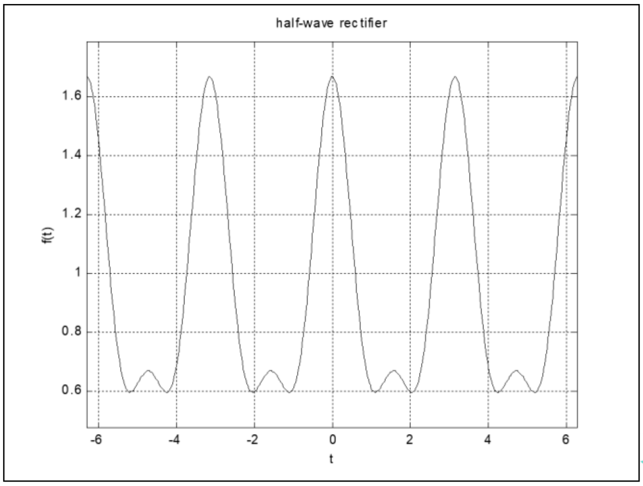
Gambar 6.11 Simulasi Komponen Gelombang Dasar untuk *Half-wave rectifier* Gambar 6.10

2. Grafik untuk Gelombang Berulang *Half-Wave Rectifier*

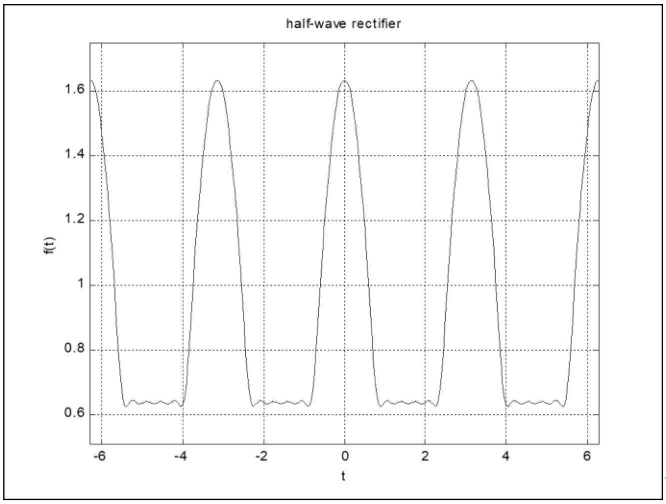
Persamaan (6.7) adalah persamaan gelombang berulang untuk sinusoida tersearahkan setengah gelombang gambar 6.10.



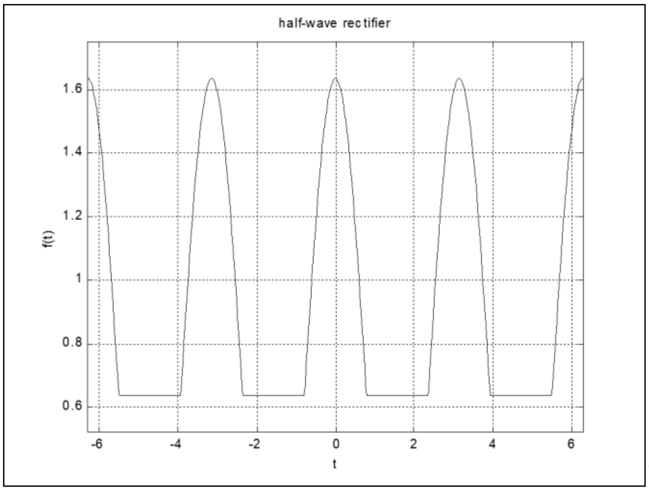
Gambar 6.12.a Simulasi Gelombang Berulang untuk *Half-Wave Rectified* Gambar 6.10 Harmonisa ke-2



Gambar 6.12.a Simulasi Gelombang Berulang untuk *Half-Wave Rectified* Gambar 6.10 Harmonisa ke-3



Gambar 6.12.c Simulasi Gelombang Berulang untuk *Half-Wave Rectified* Gambar 6.10 Harmonisa ke-10



Gambar 6.12.d Simulasi Gelombang Berulang untuk *Half-Wave Rectified* Gambar 6.10 Harmonisa ke-100

3. Bentuk Kompleks dari Gelombang Berulang *Half-Wave Rectified*

Berdasarkan persamaan (6.25):

$$c_n = \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2t\, e^{-j2nt}dt$$

$$= \frac{-1}{2jn\pi}\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2t\, d(e^{-2jnt})$$

$$= \left[e^{-j2nt}\left(\frac{-\cos 2t}{j2n}+\frac{\sin 2t}{2n^2}\right)\frac{n^2}{\pi(1+n^2)}\right]_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}$$

$$= \frac{\cos 2nt}{\pi(1+n^2)}$$

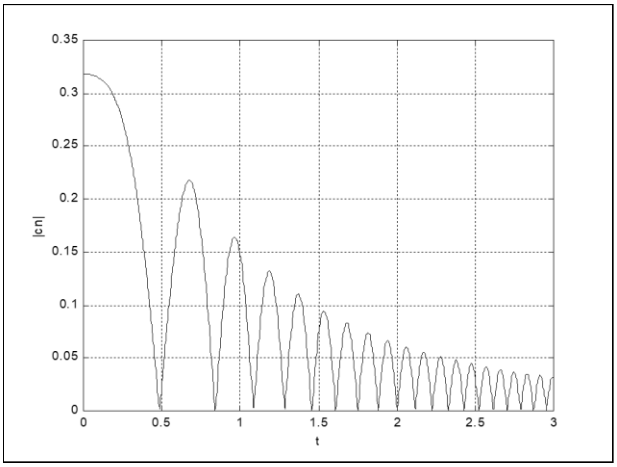
Berdasarkan persamaan (6.24), maka:

$$f(t) \quad = \quad \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{-jn\omega_0 t} c_n$$

$$f(t) \quad = \quad \sum_{n=-\sim}^{\sim} \frac{\cos 2nt}{\pi(1+n^2)} e^{-j2nt} \qquad (6.33)$$

Magnitudo (besarnya) persamaan (6.8) adalah:

$$|c_n| \quad = \quad \left| \frac{\cos 2nt}{\pi(1+n^2)} \right| \qquad (6.34)$$



Gambar 6.13 Magnitudo Kompleks *Half-wave Rectifier* Gambar 6.10

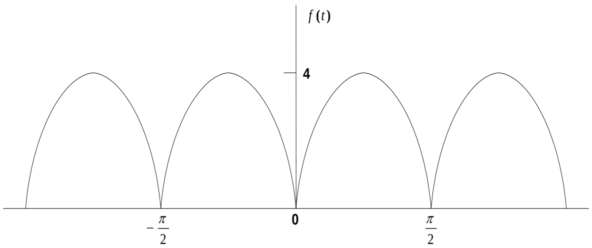
6.5. Soal-Soal Latihan Bab VI

1. Tentukan persamaan dan grafik deret Fourier dari fungsi,

$$f(t)=\begin{cases}0 & -1\le t<-0{,}5\\ 4 & -0{,}5\le t<0{,}5\\ 0 & 0{,}5\le t<1\end{cases}$$

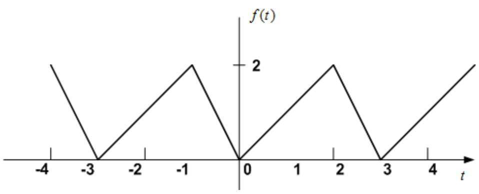
$$f(t+2)=f(t)$$

2. Tentukan persamaan dan grafik deret Fourier untuk sinusoida tersearahkan gelombang penuh (*full-wave-rectified*), seperti yang diperlihatkan pada gambar 6.14 berikut, dimana f(t) $=|4sin2t|$. Fungsi tersebut merupakan sinusoida yang amplitudo negatifnya diubah tandanya, dan juga merupakan keluaran suatu rangkaian penyearah.

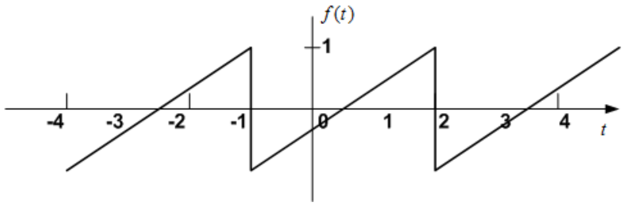


Gambar 6.14 Sinusoida yang disearahkan *full-wave-rectified* untuk soal no.2

3. Tentukan persamaan dan grafik deret Fourier dari fungsi yang bentuk gelombangnya diperlihatkan pada gambar 6.15 dan 6.16.



Gambar 6.15 Bentuk gelombang untuk soal no.3



Gambar 6.16 Bentuk gelombang untuk soal no.3

BAB VII

TRANSFORMASI FOURIER UNTUK SINYAL WAKTU NON-PERIODIK

7.1. Tujuan Pembelajaran

1. Memahami dan menjelaskan tentang konsep luasan untuk integral dan sigma (Σ)
2. Memahami dan menjelaskan definisi Transformasi Fourier
3. Memahami dan menjelaskan Sifat-sifat Transformasi Fourier
4. Memahami dan menjelaskan tentang fungsi impuls, fungsi signum, dan fungsi step.

7.2. Konsep Luasan untuk Integral dan Sigma (Σ)

Jika kurva $y = f(x)$ pada gambar 7.1 dalam selang $0 \le x \le 2$ dibagi menjadi n bagian sehingga:

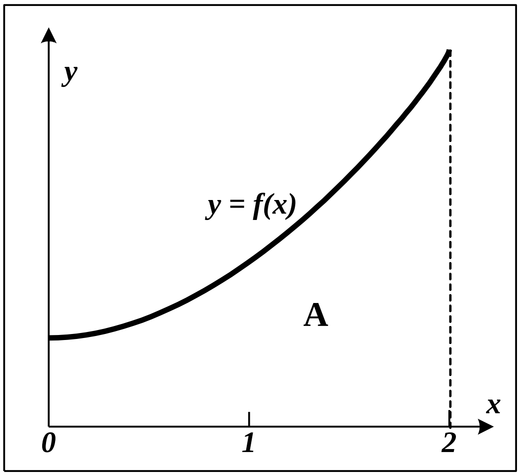
$$x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le ..... \le x_{n-1} \le x_n$$

maka panjang Δx adalah: $2/n$. Luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ pada gambar 7.2 adalah jumlah dari luas setiap siku empat. Luas setiap siku empat tersebut adalah: $f(x_{n-1})\Delta x$. Jika luasan total adalah L, maka

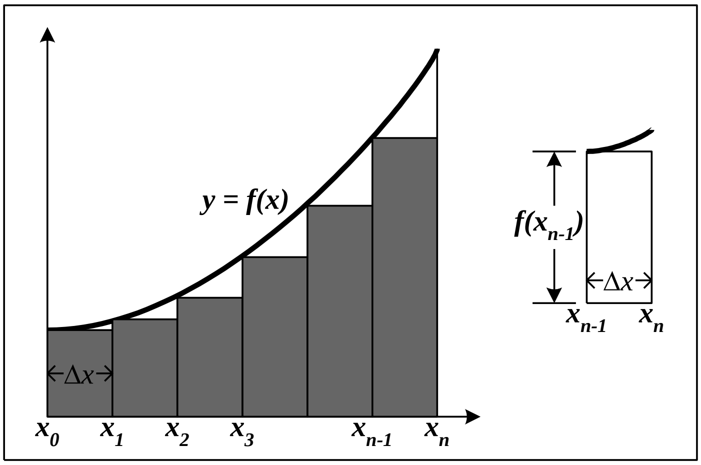
$$
\begin{aligned}
L &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x \\
&= \Delta x[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_{n-1})] \\
&= \frac{2}{n}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_{n-1})]
\end{aligned}
$$

Atau:

$$L = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{7.1}$$



Gambar 7.1 Kurva *y = f*(*x*)



Gambar 7.2 Luasan di bawah kurva $y = f(x)$

Jika $n \rightarrow \sim$, maka:

$$L = \lim_{n \to \sim} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{7.2}$$

Jika $n \rightarrow \sim$, dan Δx = 2/n, maka $\Delta x \rightarrow 0$. Sehingga:

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{7.3}$$

Dan kita tahu bahwa, jika $y = f(x)$ pada selang $a \le x \le b$:

$$L = \int_a^b f(x)dx \tag{7.4}$$

Maka:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x} \tag{7.5}$$

7.3. Definisi Transformasi Fourier

Jika suatu fungsi $f(t)$ tak berulang tapi terdefinisikan pada suatu selang tak hingga (mis: $y = x^2$), maka fungsi tersebut tidak dapat diuraikan atas deret Fourier. Tetapi masih dimungkinkan untuk menganggap fungsi tersebut berulang dengan perioda tak hingga dan hasil-hasil pembahasan sebelum ini dapat diperluas untuk hal tersebut (untuk T → ~).

Kita tulis kembali persamaan (6.24), bentuk eksponensial dari deret Fourier:

$$f(t) \quad = \quad \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{jn\omega_0 t} c_n \tag{7.6}$$

dimana,

$$c_n = \tfrac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad (7.7)$$

Jika kita ambil t_0 = -T/2 maka t_0 + T = T/2.

Untuk T → ~,maka –T/2 → -~ dan T/2 → ~, sehingga:

$$c_n = \tfrac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad (7.8)$$

$$c_n = \tfrac{1}{T} \int_{-\sim}^{\sim} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad (7.9)$$

$$c_n T = \int_{-\sim}^{\sim} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad (7.10)$$

dan

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Jika T → ~, maka ω_0 → 0, sehingga ω_0 menjadi sangat kecil atau limit ω_0 mendekati nol.

Kita nyatakan limit ini sebagai diferensial:

$$\omega_0 \rightarrow d\omega$$

Jika ω_0 → 0, maka fungsi tidak kontinyu (konsep kontinyu artinya tak berhingga). Supaya fungsi tetap kontinu maka n → ~, sehingga:

$$n\omega_0 \rightarrow \omega$$

Maka:

$$c_nT = \int_{-\sim}^{\sim} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (7.11)$$

Karena proses limit hanya melibatkan fungsi frekuensi (T dan ω) dan tidak melibatkan fungsi waktu *t*, maka ruas kanan persamaan (7.11) adalah fungsi frekuensi juga. Atau $c_nT = F(j\omega)$, sehingga:

$$\boxed{F(j\omega) = \int_{-\sim}^{\sim} f(t)e^{-j\omega t}dt} \qquad (7.12)$$

Bisa ditulis sebagai:

$$\boxed{\Im[f(t)] = \int_{-\sim}^{\sim} f(t)e^{-j\omega t}dt} \qquad (7.13)$$

Tulis kembali persamaan (7.6):

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{jn\omega_0 t}c_n$$

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{j\omega t}c_nT \times \tfrac{1}{T} \qquad \rightarrow \tfrac{1}{T} = \tfrac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow \tfrac{d\omega}{2\pi}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{j\omega t}c_nT \times \tfrac{d\omega}{2\pi}$$

$$f(t) = \tfrac{1}{2\pi}\sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{j\omega t}c_nT\,d\omega \qquad (7.14)$$

Terapkan proses limit pada persamaan (7.13), sesuai dengan persamaan (7.5) dengan $\omega \rightarrow 0$

$f(t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega \to 0} \sum_{n=-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} c_n T \, d\omega$

$f(t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} c_n T \, d\omega$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} F(j\omega) \, d\omega} \tag{7.15}$$

Persamaan (7.12) dan (7.15) dinamakan **Pasangan Transformasi Fourier.** Fungsi F(jω) adalah trasformasi Fourier dari *f*(*t*), dan *f*(*t*) adalah trasformasi Fourier invers dari F(jω).
Trasformasi Fourier invers dari F(jω) bisa ditulis sebagai:

$$\boxed{\mathfrak{I}^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} F(j\omega) \, d\omega} \tag{7.16}$$

Hubungan pasangan transformasi persamaan (7.12) dan (7.15) adalah yang paling penting! Pentingnya hubungan ini kita tekankan dengan mengulangi dan menempatkan dalam sebuah kotak:

$$F(j\omega) = \int_{-\sim}^{\sim} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{7.17a}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sim}^{\sim} e^{j\omega t} F(j\omega) \, d\omega \tag{7.17b}$$

Pasangan transformasi tersebut biasa ditulis sebagai:

$$\boxed{f(t) \leftrightarrow F(j\omega)} \tag{7.18}$$

7.4. Sifat-sifat Transformasi Fourier

7.4.1. Fungsi Impuls Satuan [δ(t)]

Dengan menggunakan definisi:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\sim}^{\sim} \delta(t)dt = 1 \qquad \rightarrow t = 0 \tag{7.19}$$

Sehingga

$$\int_{-\sim}^{\sim} g(t)\delta(t)dt = g(0)$$

$$\int_{-\sim}^{\sim} \delta(t - t_0)dt = 1 \quad \rightarrow t = t_0 \tag{7.20}$$

Sehingga

$$\int_{-\sim}^{\sim} g(t)\delta(t - t_0)dt = g(t_0) \tag{7.21}$$

Contoh 7.1:

Tentukan transformasi Fourier dari $f(t) = \delta(t)$

Penyelesaian contoh 7.1:

$F(j\omega) \quad = \quad \int_{-\sim}^{\sim} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$\rightarrow$ sesuai dengan persamaan (7.20), $\quad g(t) = e^{-j\omega t}$

$F(j\omega) \quad = \quad \int_{-\sim}^{\sim} e^{-j\omega t}\delta(t)dt$

$= \quad g(0)$

$= \quad e^{-j\omega 0} = e^0 = 1$

Atau menurut penulisan persamaan (7.18):

$$\boxed{\delta(t) \leftrightarrow 1} \tag{7.22}$$

(Transformasi Fourier dari δ(t) adalah 1)

$$\boxed{k\delta(t) \leftrightarrow k}, \qquad k \text{ adalah konstanta} \tag{7.23}$$

Contoh 7.2:

Tentukan transformasi Fourier dari $f(t) = \delta(t - t_0)$

Penyelesaian contoh 7.2:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$\rightarrow$ sesuai dengan persamaan (7.20), $g(t) = e^{-j\omega t}$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\delta(t - t_0)dt \\ &= g(t_0) \\ &= e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

Atau:

$$\boxed{\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}} \tag{7.24}$$

Contoh 7.3:

Tentukan transformasi Fourier dari $F(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$

Penyelesaian contoh 7.3:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}F(j\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\delta(\omega - \omega_0)d\omega \end{aligned}$$

$\rightarrow$ sesuaidengansifat 2) dimana $g(t) = e^{j\omega t}$ dan $t = \omega_0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} g(\omega_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

Atau:

$$\tfrac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)} \qquad (7.25)$$

Dan dengan mengganti ω_0 dengan $-\omega_0$, maka:

$$\boxed{e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)} \qquad (7.26)$$

Jika $\omega_0 = 0$, maka:

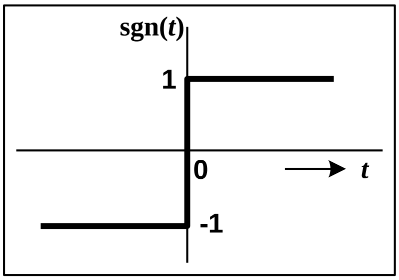
$$e^{-j0t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + 0)$$

$$\boxed{1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)} \qquad (7.27)$$

7.4.2. Fungsi Signum [sgn(t)]

Definisi :

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \qquad (7.28)$$



Gambar 7.3 Fungsi Signum

Atau

$$\boxed{\operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t)} \qquad (7.29)$$

Contoh 7.4:

Tentukan transformasi Fourier dari,

$\operatorname{sgn}(t) = e^{-at}[u(t) - u(-t)]$, $a \to 0$

Penyelesaian contoh 7.4:

$$\begin{aligned}
\Im[\operatorname{sgn}(t)] &= \lim_{a\to 0} \int_{-\sim}^{\sim} e^{-at}[u(t) - u(-t)]e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \lim_{a\to 0} \int_{-\sim}^{\sim} e^{-j\omega t} e^{-at} u(t)\,dt - \int_{-\sim}^{\sim} e^{-j\omega t} e^{-at} u(-t)\,dt \\
&= \lim_{a\to 0} \left[\int_{0}^{\sim} e^{-j\omega t} e^{-at}\,dt - \int_{-\sim}^{0} e^{-j\omega t} e^{-at}\,dt \right] \\
&= \lim_{a\to 0} \left[\int_{0}^{\sim} e^{-(j\omega + a)t}\,dt - \int_{-\sim}^{0} e^{-(j\omega + a)t}\,dt \right] \\
&= \lim_{a\to 0} \left(\left[\tfrac{-1}{j\omega + a} e^{-(j\omega + a)t} \right]_{0}^{\sim} - \left[\tfrac{-1}{j\omega + a} e^{-(j\omega + a)t} \right]_{-\sim}^{0} \right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{a \to 0} \left(\left[\frac{-1}{(j\omega + a)e^{(j\omega+a)t}} \right]_0^{\sim} - \left[\frac{-1}{(j\omega + a)e^{(j\omega+a)t}} \right]_{-\sim}^{0} \right)$$

$$= \lim_{a \to 0} \left(\left[\frac{-1}{\infty} - \frac{-1}{j\omega + a} \right] - \left[\frac{-1}{j\omega + a} - \frac{-1}{\infty} \right] \right)$$

$$= \lim_{a \to 0} \left(\left[0 + \frac{1}{j\omega + a} \right] - \left[\frac{-1}{j\omega + a} - 0 \right] \right)$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{2}{j\omega + a}$$

$$= \frac{2}{j\omega}$$

$\boxed{\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$ atau $\boxed{u(t) - u(-t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$ (7.30)

7.4.3. Fungsi Step $[u(t)]$

Jika:

$$u(t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t) \tag{7.31}$$

Dengan menggunakan persamaan (6.27) dan (6.29), maka:

$$\begin{aligned}
\Im[u(t)] &= \Im[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)] \\
&= \Im[\tfrac{1}{2}] + \Im[\tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)] \\
&= \tfrac{1}{2}\, 2\pi\delta(\omega) + \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{j\omega} \\
&= \pi\delta(\omega) + \tfrac{1}{j\omega}
\end{aligned}$$

$\boxed{u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$ (7.32)

Tabel 7.1 Pasangan Transformasi Fourier yang Umum Dikenal
(Digunakan sebagai dasar perhitungan untuk transformasi fungsi yang lain)

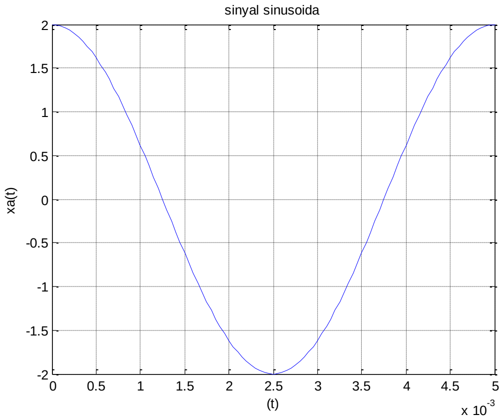
f(t)	$\Im\{f(t)\} = F(j\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
kf(t) → (k = konstanta)	kF(jω)
sgn(t)	$\frac{2}{j\omega}$
u(t)	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

Perhitungan transformasi Fourier biasanya sudah tidak menggunakan persamaan 7.17.a dan 7.17.b. Beberapa persamaan dasar sudah disusun dalam tabel 7.1 sesuai dengan analisis Fourier pada contoh 7.1 sampai dengan 7.4 di atas.

7.5. Aplikasi Transformasi Fourier

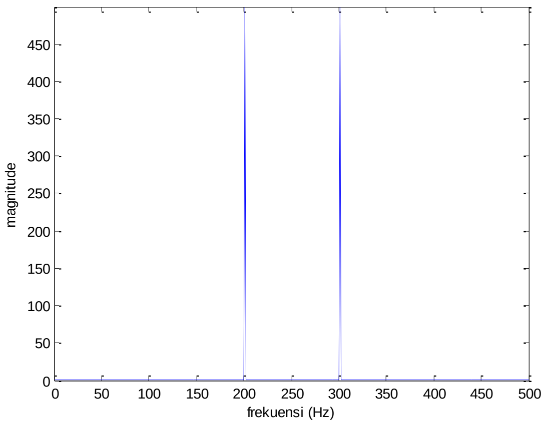
Aplikasi analisis transformasi Fourier biasanya digunakan dalam analisis awal pengolahan sinyal sebelum diolah lebih lanjut dengan algortima yang lebih kompleks.

Misalnya dalam pengenalan suara, analisis Fourier digunakan untuk menemukan frekuensi dasar sinyal. Apabila dikolaborasikan dengan algoritma logika fuzzy (tidak dibahas dalam buku ini), maka komputer akan dilatih agar dapat mengenali pola suara manusia tertentu.



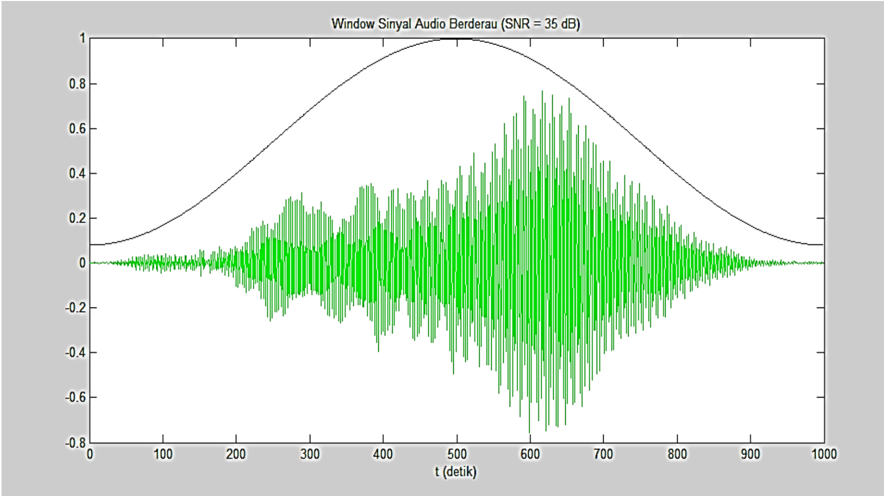
Gambar 7.4.a Sinyal Sinusoida x(t) = A cos (2πft + φ) dengan f = 200 Hz

dalam domain waktu (t) (b) dalam domain frekuensi f

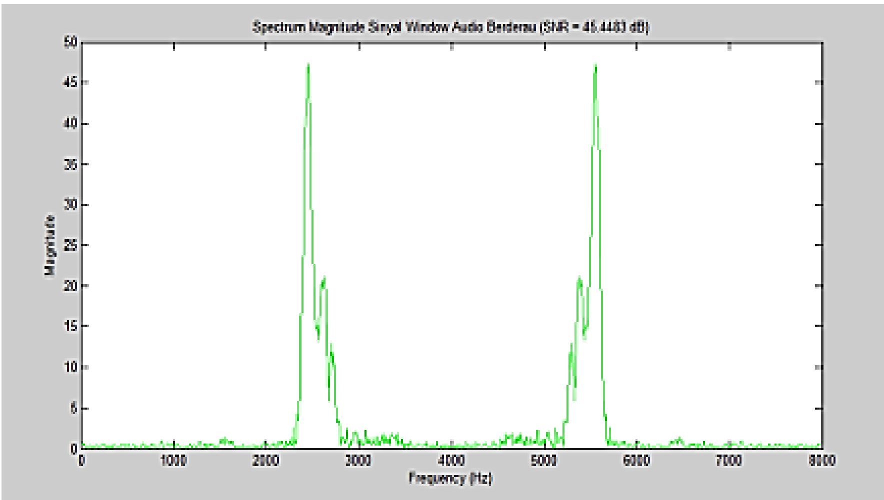


Gambar 7.4.b Sinyal Sinusoida x(t) = A cos (2πft + φ) dengan f = 200 Hz

dalam domain waktu (t) dalam domain frekuensi f



Gambar 7.5.a Sinyal Audio dalam Domain Waktu (*t*)



Gambar 7.5.b Sinyal Audio dalam Domain Frekuensi *f*

7.6. Soal-Soal Latihan Bab VII

Tentukan transformasi Fourier dari setiap fungsi berikut dan buat ilustrasi grafiknya:

1. $f(t) = u(t)$
2. $f(t) = u(t - t_0)$
3. $f(t) = u(t - 3)$
4. $f(t) = \delta(t)$
5. $f(t) = \delta(t - t_0)$
6. $f(t) = \delta(t + 5)$
7. $f(t) = u(t) - u(t - 1)$
8. $f(t) = e^{j\omega_0 t}$
9. $f(t) = e^{-j\omega_0 t}$
10. $f(t) = e^{-at}u(t) \qquad a > 0$
11. $f(t) = e^{-at}[u(t) - u(t - 1)]$
12. $f(t) = 4e^{-3t}u(t)$
13. $f(t) = 4e^{-3t}[u(t + 2) - u(t - 2)$
14. $f(t) = 10e^{20t}u(-t)$
15. $f(t) = \cos \omega_0 t$
16. $f(t) = \sin \omega_0 t$
17. $f(t) = e^{-at} \cos bt \; u(t)$
18. $f(t) = 3\cos^2 2t$
19. $f(t) = 4\cos(2t + 60^\circ)$
20. $f(t) = 6(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$

DAFTAR PUSTAKA

1. Dadang Gunawan, Filbert Hilman Juwono. 2012. *Pengolahan Sinyal Digital dengan Pemrograman MATLAB*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
2. Budiono Mismail. 1995. *Rangkaian Listrik Jilid Pertama dan Kedua*. Bandung: Penerbit ITB.
3. Hany Ferdinando. 2010. *Dasar-dasar Sinyal dan Sistem*. Yogyakarta: Penerbit ANDI.
4. Harlianto Tanudjaja. 2007. *Pengolahan Sinyal Digital dan Sistem Pemrorosesan Sinyal*. Yogyakarta: Penerbit ANDI.
5. John G. Proakis, Dimitri G. Manolakis. 1995. *Pemrosesan Sinyal Digital*. Jakarta: PT Prenhallindo.
6. Khairunnisa. 2012. *Analisa dan Simulasi Gelombang Berulang Kompleks dengan Menggunakan Bahasa Pemrograman Matlab*. Jurnal Intekna, Tahun XII, No.2.
7. Khairunnisa. 2016. *Modul Simulasi Akuisisi Data Sinyal Audio*. Jurnal Simantec, Vol. 5, No.2, Juni 2016.
8. Khairunnisa. 2017. *Analisis Dan Simulasi Spektrum Sinyal AM Dengan Menggunakan Matlab*. Laporan Akhir Penelitian, Politeknik Negeri Banjarmasin.
9. Khairunnisa. 2018. *Perbandingan Metode Fourier Dan Metode Wavelet Untuk Analisis Kualitas Sinyal Audio*. Laporan Akhir Penelitian, Politeknik Negeri Banjarmasin.
10. R.H Sianipar, I.K. Wiryajati, M. Irwan. 2012. *Pemrosesan Sinyal Digital dan Perancangan Filter Digital*. Yogyakarta: Penerbit ANDI.

11. http://referensi.dosen.narotama.ac.id/files/2011/12/Tutorial _MatLab_TeguhW.pdf. Diakses tanggal 8 Juni 2014.
12. Tri B Santoso, Miftahul Huda. 2005. *Modul 1 Proses Perekaman dan Pengeditan Sinyal Wicara*. Universitas Kristen Krida Wacana.
13. http://alkeslabindo.com
14. https://dewinofigr.wordpress.com
15. http://digitalsoundandmusic.com/wp-content/uploads/2014/05/Figure1-2.gif
16. https://nugan88.wordpress.com
17. https://rizal.blog.undip.ac.id
18. https://slideplayer.com/slide/2433690/8/images/9/Analog+Example.jpg
19. https://slideshare.net/dwiprananto
20. https://slideshare.net/nugrahabeny
21. http://tri-hardianto.blogspot.com

LAMPIRAN

Listing Program M-File Matlab

Gambar 2.1

```
clear all; close all; clc;

fa = input('frekuensi analog (Hz) =');
A = input('amplitudo analog (V) =');
phase = input('phase sinyal analog (derajat) =');
teta = (pi/180)*phase; %mengubah satuan sudut radian ke derajat
wa = 2*pi*fa;    %frekuensi sudut
Ta = 1/fa;       %Perioda analog
wat=(-2*pi):1/1000:(4*pi);   %interval waktu t di grafik
xa=A*cos((wat)+teta); %persamaan sinyal analog
plot(wat,xa,'r');            %membuat grafik sinyal xa terhadap
waktu t
hold on

a = -A:A/200:A;
plot(0,a,'b',wat,0,'b');       %membuat sumbu koordinat
xlabel('(wat + teta)');
ylabel('xa(t)');
title('sinyal sinusoida analog');
hold on

axis([-2*pi 4*pi -(A+0.2) (A+0.2)])
hold on ; grid on
```

Keterangan:

'wat' = $\omega_a t$

Gambar 2.2

```
clear all; close all; clc;

fa = input('frekuensi analog (Hz) =');
A = input('amplitudo analog (V) =');
phase = input('phase sinyal analog (derajat) =');
teta = (pi/180)*phase; %mengubah satuan sudut radian ke derajat
wa = 2*pi*fa;    %frekuensi sudut
Ta = 1/fa;       %Perioda analog
t=(-Ta):Ta/2000:(2*Ta);   %interval waktu t di grafik
xa=A*cos((2*pi*fa*t)+teta); %persamaan sinyal analog
```

```
plot(t,xa,'r');              %membuat grafik sinyal xa terhadap
waktu t
hold on

a = -A:A/200:A;
plot(0,a,'b',t,0,'b');       %membuat sumbu koordinat
xlabel('(t)');
ylabel('xa(t)');
title('sinyal sinusoida analog');
hold on

axis([-Ta 2*Ta -(A+0.2) (A+0.2)])
hold on ; grid on
```

Gambar 2.5

```
fd = input('frekuensi diskrit (k/N) =');    %fd = k/N (harus
rasional)
A = input('amplitudo diskrit (V) =');
phase = input('phase sinyal diskrit (derajat) =');
teta = (pi/180)*phase; %mengubah satuan sudut radian ke derajat
wd = 2*pi*fd;   %frekuensi sudut
N = 1/fd;      %Perioda diskrit
n=(-2*N):1:(2*N);   %interval satuan waktu n di grafik
xd=A*cos((2*pi*fd*n)+teta); %persamaan sinyal diskrit
stem(n,xd,'r');              %membuat grafik sinyal xa terhadap
waktu t
hold on

a = -A:A/200:A;
plot(0,a,'k',n,0,'k');       %membuat sumbu koordinat
xlabel('(n)');
ylabel('xd(n)');
title('sinyal sinusoida diskrit');
grid on
```

Gambar 3.4

```
clear all; close all; clc;
fa=2; A=5; Ta=1/fa; fp=10; tp=1/fp;

t=0:(1/1000):1;
xa=A*sin(2*pi*fa*t);
plot(t,xa, 'k');
xlabel('(t)'); ylabel('x(t)')
grid on; axis([0 1 -A A]);
hold on

for n=0:1/fp:1
xn=A*sin(2*pi*(fa/fp)*n*fp);
stem(n,xn,'b','linewidth',1.5);
end

figure
n=0:1:fp;
```

```
xn=A*sin(2*pi*(fa/fp)*n);
stem(n,xn,'b','linewidth',1.5);
xlabel('(n)'); ylabel('x(n)')
grid on
```

Gambar 3.5 dan 3.6

```
clear all; close all; clc;
fa=50; A=3; Ta=1/fa; fp=40; tp=1/fp;
t=0:(1/1000):1;
xa=A*cos(2*pi*fa*t);
plot(t,xa, 'k');
xlabel('(t)'); ylabel('x(t)')
grid on; axis([0 1 -A A]);
hold on


for n=0:1/fp:1
xn=A*cos(2*pi*(fa/fp)*n*fp);
stem(n,xn,'b','linewidth',1.5);
end

axis ([0 1 -A A])

figure
n=0:1:fp;
xn=A*sin(2*pi*(fa/fp)*n);
stem(n,xn,'b','linewidth',1.5);
xlabel('(n)'); ylabel('x(n)')
grid on

axis ([0 fp -A A])
```

Gambar 3.9

```
clear all; close all; clc;
t=0:(10/1000):10;
xa=0.9.^t;
plot(t,xa, 'k');
xlabel('(t)detik'); ylabel('x(t)')
grid on; axis([0 10 0 1]);
hold on

figure
plot(t,xa, 'k');
xlabel('(t)detik'); ylabel('x(t)')
grid on; axis([0 10 0 1]);
hold on

for n=0:1:10;
xn=0.9.^n;
stem(n,xn,'b','linewidth',1.5);
axis([0 10 0 1]);
end

figure
```

```
n=0:1:10;
xn=0.9.^n;
stem(n,xn,'b','linewidth',1.5);
axis([0 10 0 1]);
xlabel('(n)'); ylabel('x(n)')
grid on;
```

Gambar 4.1, 4.2, 4.3, dan 4.4

```
%SINYAL DISKRIT
clear all;
close all;
clc;
disp('**********************');
disp('Program Sinyal Diskrit');
disp('**********************');
disp('Pilih Fungsi Sinyal Diskrit');
disp('1. Impulse Unit');
disp('2. Step Unit');
disp('3. Ramp Unit');
disp('4. Eksponensial Unit');
disp('                           ');
pilihan = input('No urut fungsi diskrit yang dipilih --> ');
disp('                           ');
switch pilihan

case 1
    disp('Fungsi Impulse Unit');
    n_max = input('n maksimum = ');
    n_min = input('n minimum = ');
    disp('                           ');
    disp('jika : x(n) = x(n+2) maka phase pergeseran = 2');
    disp('                           ');
    m = input('phase pergeseran = '); %langkah pergeseran
    unit_nol = abs(n_min);
    unit_satu = abs(n_max);

    impulse =[zeros(1,unit_nol),1,zeros(1,unit_satu)];
    n = (n_min) : (n_max);
    subplot(2,1,1)
    stem(n,impulse);
    xlabel('(n)');
    ylabel('x(n)');
    title('grafik impulse unit x(n)');
    axis([n_min n_max 0 1])

    impulse_geser=[zeros(1,unit_nol-m),1,zeros(1,unit_satu+m)];
    subplot(2,1,2)
    stem(n,impulse_geser);
    xlabel('(n)');
    ylabel('x(n+m)');
    title('grafik impulse unit x(n+m)');
    axis([n_min n_max 0 1]);

case 2
    disp('Fungsi Step Unit');
```

```
        n_max = input('n maksimum = ');
        n_min = input('n minimum = ');
        disp('                           ');
        disp('jika : x(n) = x(n+2) maka phase pergeseran = 2');
        disp('                           ');
        m = input('phase pergeseran = '); %langkah pergeseran
        unit_nol = abs(n_min);
        unit_satu = abs(n_max);
        step =[zeros(1,unit_nol),1,ones(1,unit_satu)];
        n = (n_min) : (n_max);
        subplot(2,1,1)
        stem(n,step);
        xlabel('(n)');
        ylabel('x(n)');
        title('grafik step unit x(n)');
        axis([n_min n_max 0 1])

        step_geser=[zeros(1,unit_nol-m),1,ones(1,unit_satu+m)];
        subplot(2,1,2)
        stem(n,step_geser);
        xlabel('(n)');
        ylabel('x(n+m)');
        title('grafik step unit x(n+m)');
        axis([n_min n_max 0 1]);

    case 3
        disp('Fungsi Ramp Unit');
        n_max = input('n maksimum = ');
        n_min = input('n minimum = ');
        disp('                           ');
        disp('jika : x(n) = x(n+2) maka phase pergeseran = 2');
        disp('                           ');
        m = input('phase pergeseran = '); %langkah pergeseran
        unit_nol = abs(n_min);
        unit_satu = abs(n_max);
        n = (n_min) : (n_max);

        step1 = [zeros(1,unit_nol),0,ones(1,unit_satu)];
        ramp = step1.*n;
        subplot(2,1,1)
        stem(n,ramp);
        xlabel('(n)');
        ylabel('x(n)');
        title('grafik ramp unit x(n)');
        axis([n_min n_max 0 n_max])

        ramp_geser=[zeros(1,unit_nol-m),0,ones(1,unit_satu+m)];
        subplot(2,1,2)
        stem(n-m,ramp);
        xlabel('(n)');
        ylabel('x(n+m)');
        title('grafik ramp unit x(n+m)');
        axis([n_min n_max 0 n_max]);

    case 4
        disp('Fungsi Eksponensial Unit a^n');
```

```
        n_max = input('n maksimum = ');
        n_min = input('n minimum = ');
        n = (n_min) : 0.1:(n_max);
        a = input('a = ');
        eksponensial = a.^n;
        stem(n,eksponensial);
        xlabel('(n)');
        ylabel('x(n)');
        title('grafik fungsi eksponensial x(n)');
end;
```

Gambar 4.7

```
%SINYAL DISKRIT
    clear all;
    close all;
    clc;

            n_min = input('n minimum = ');
            n_max = input('n maksimum = ');

            L = n_max-n_min;   %lebar sumbu x

            for i=0:(L)
                i=i+1;
                fprintf('data x ke-(%d) : ',i);
                x(i) = input('');
            end

                disp(['x(n) = ',num2str(x)]);

    n = n_min : n_max;

    stem(n,x);
    xlabel('(n)');
    ylabel('x(n)');
```

Gambar 5.7

```
%KONVOLUSI SINYAL DISKRIT
    clear all;
    close all;
    clc;

    disp('*********************************');
    disp('    Konvolusi Sinyal Diskrit    ');
    disp('*********************************');

            n_min = input('n minimum = ');
            n_max = input('n maksimum = ');

            L = n_max-n_min;   %lebar sumbu x
            for i=0:(L)
                i=i+1;
                fprintf('data h ke-(%d) : ',i);
                h(i) = input('');
```

```
        end
            disp(['h(n) = ',num2str(h)]);

        for i=0:(L)
            i=i+1;
            fprintf('data x ke-(%d) : ',i);
            x(i) = input('');
        end
            disp(['x(n) = ',num2str(x)]);

    n = n_min : n_max;
    y = conv(h,x); %fungsi konvolusi
    disp(y);
    subplot(3,1,1)
    stem(n,h);
    xlabel('(n)');
    ylabel('h(n)');
    subplot(3,1,2)
    stem(n,x);
    xlabel('(n)');
    ylabel('x(n)');
    subplot(3,1,3)
    stem(y);
    xlabel('(n)');
    ylabel('h(n)*x(n)');
```

Gambar 5.11

```
%KONVOLUSI SINYAL DISKRIT
clear all;
close all;
clc;

disp('********************************');
disp('    Konvolusi Sinyal Diskrit    ');
disp('********************************');

        n_min = input('n minimum = ');
        n_max = input('n maksimum = ');

        L = n_max-n_min;   %lebar sumbu x
        for i=0:(L)
            i=i+1;
            fprintf('data h ke-(%d) : ',i);
            h(i) = input('');
        end
            disp(['h(n) = ',num2str(h)]);

        for i=0:(L)
            i=i+1;
            fprintf('data x ke-(%d) : ',i);
            x(i) = input('');
        end

            disp(['x(n) = ',num2str(x)]);
```

```
n = n_min : n_max;
y1 = conv(h,x); %fungsi konvolusi
y2 = conv(x,h);
disp(['h(n)*x(n)=  ',num2str(y1)]);
disp(['x(n)*h(n)=  ',num2str(y2)]);
subplot(2,2,1)
stem(n,h);
xlabel('(n)');
ylabel('h(n)');
subplot(2,2,2)
stem(n,x);
xlabel('(n)');
ylabel('x(n)');
subplot(2,2,3)
stem(y1);
xlabel('(n)');
ylabel('h(n)*x(n)');
subplot(2,2,4)
stem(y2);
xlabel('(n)');
ylabel('x(n)*h(n)');
```

Gambar 6.4

Persamaan (6.26) :

$$f(t) = 3 + \sum_{n=1}^{\sim} \frac{12}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi t}{2}$$

```
%DERET FOURIER GELOMBANG PULSA SEGI EMPAT
syms t x;
f=(12/(x*pi))*(sin(x*pi/2))*(cos(x*pi*t/2));
a = input ('tingkat harmonisa ke =');
symsum (f,1,a);
y = 3+ans;
pretty (y)
t = linspace (0,10,1000);
ezplot(y);
ylabel ('f(t)')
grid on;
```

Gambar 6.8

Persamaan (6.29) :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\sim} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$

```
%DERET FOURIER GELOMBANG GIGI GERGAJI
syms t x;
f = 2*((-1)^(x+1))*sin(x*t)/x
```

```
a = input ('tingkat harmonisa ke =');
symsum (f,1,a)
y = ans
pretty (y)
t = linspace (0,10,1000);
ezplot(y)
```

Gambar 6.12

Persamaan (6.32) :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\sim} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\pi(1+n)}{(1+n)} + \frac{\sin \frac{1}{2}\pi(1-n)}{(1-n)} \right) \cos 2nt$$

```
%Deret Fourier Half-Wave Rectified
syms A B t x;
A = sin(0.5*pi*(1+x));
B = sin(0.5*pi*(1-x));
f = (1/pi)*((A/(1+x))+(A/(1-x)))*cos(2*x*t);
a = input ('tingkat harmonisa ke =');
symsum (f,1e-10,a);
y = (1/pi)+ ans;
t = linspace (0,10,1000);
ezplot(y);grid on
```

Gambar 7.4

```
%TRANSFORMASI FOURIER
clear all; close all; clc;

fa = input('frekuensi analog ='); A = input('amplitudo analog
=');
phase = input('phase sinyal analog (derajat) =');
fp = input('cuplikan (per detik) =');
waktu = input('durasi waktu (detik) =');
teta = (pi/180)*phase; wa = 2*pi*fa; Ta = 1/fa; t=0:Ta/100:waktu;
xa=A*cos((2*pi*fa*t)+teta);

plot(t,xa,'b');
axis([0 Ta min(xa) max(xa)]);
xlabel('(t)'); ylabel('xa(t)'); title('sinyal sinusoida');
grid on

t=0:1/fp:waktu;
xa=A*cos((2*pi*fa*t)+teta);
S = fft(xa,fp);
figure
plot(abs(S));
axis([0 fp 0 max(S)]);
xlabel('frekuensi (Hz)'); ylabel('magnitude')
```

BIODATA PENULIS

Khairunnisa adalah dosen pada Jurusan Teknik Elektro, Program Studi Teknik Elektronika, Politeknik Negeri Banjarmasin (Sejak 2004). Lulus dari SMU Negeri 1 Banjarmasin (1998), penulis memilih melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Teknik Elektro (lulus tahun 2003) dan pendidikan S2 di Program Studi Manajemen Industri (lulus tahun 2010) pada Universitas Brawijaya Malang.

Selama melaksanakan tugas mengajar di Jurusan Teknik Elektro Politeknik Negeri Banjarmasin khususnya pada mata kuliah Pengolahan Sinyal, penulis menemui kendala dalam hal menyampaikan materi kuliah kepada mahasiswa. Walau pun banyak literatur yang bisa di dapat dari buku di perpustakaan maupun dari internet, penulis tidak bisa begitu saja menyampaikan materi sesuai isi literatur yang ada secara keseluruhan, karena tidak semua bisa dipahami mahasiswa dengan mudah. Penulis berupaya menyajikan materi secara sistematis dengan membuat beberapa modul yang diambil dari beberapa sumber. Penulis menambahkan beberapa contoh bahasa pemrograman Matlab sesuai dengan pokok bahasan sebagai salah satu sarana yang bisa dipakai mahasiswa untuk memahami dan membuat simulasi sinyal. Kompilasi beberapa modul yang sudah disusun penulis dijadikan dalam satu buku. Diharapkan buku ini dapat mempermudah penulis untuk mengembangkan setiap pokok bahasan lebih rinci dan membantu mahasiswa dalam belajar.

Pemrosesan sinyal, pengolahan sinyal suara dan berbagai aplikasinya merupakan bidang penelitian yang saat ini dirintis oleh penulis. Penulis pernah menulis beberapa artikel penelitian pada beberapa jurnal lokal dan nasional. Penulis dapat dihubungi melalui email khairunnisa@poliban.ac.id.

PENGOLAHAN SINYAL

KHAIRUNNISA

Pengolahan sinyal adalah suatu bagian dari sains. Teknik pengolahan sinyal berkembang pesat seiring dengan perkembangan teknologi komputer dan industri rangkaian terintegrasi. Perkembangan yang pesat dalam teknologi rangkaian-terintegrasi dimulai dengan integrasi skala medium (MSI) dan kemudian integrasi skala besar (LSI) dan sekarang, integrasi skala sangat besar (VLSI). Bahkan saat ini skala integrasi mikro (10^{-6}) untuk *microchip* didesain ulang sebagai teknologi nano (10^{-9}).

Kemajuan teknologi rangkaian-terintegrasi memacu perkembangan industri elektronika dimana rangkaian elektronik menjadi sangat kuat, lebih kecil, lebih cepat dan lebih murah. Rangkaian elektronik yang murah dan relatif cepat ini memungkinkan untuk mengkonstruksi sistem yang canggih yang dapat melakukan fungsi dan tugas pengolahan sinyal yang kompleks. Saat ini, hampir semua tugas pengolahan sinyal yang dilakukan secara konvensional dengan piranti analog sekarang dilakukan dengan perangkat keras digital yang tentu lebih efektif.

Penerbit Poliban Press
Redaksi :
Politeknik Negeri Banjarmasin, Jl. Brigjen H. Hasan Basry, Pangeran, Komp. Kampus ULM, Banjarmasin Utara
Telp : (0511)3305052
Email : press@poliban.ac.id

ISBN 978-623-91786-6-6